تاثیر روش نموداری در تدریس مفاهیم و حل مسائل ریاضی

اژدر سلیمانپور باکفایت[۱]، مهتا برجیسی[۲]

خلاصه: در این مقاله، یک روش ساده و مهم بنام روش نموداری را ارائه می‌دهیم که برای بیان برخی از مفاهیم ریاضی خیلی مهم و کاربردی است. ضمن بیان نقاط ضعف و قوت و آسیب شناسی روش نموداری، توانایی این روش با ذکر مثال‌های متنوعی بیان می‌شود. در ادامه، موضوع اثبات بدون کلام را بیان کرده و ضمن ارائه منابع موجود، ارتباط آن با روش نموداری بررسی می‌شود.

واژگان کلیدی: اثبات بدون کلام، تدریس مفاهیم ریاضی، روش نموداری، نمودار توابع.

۱. مدرس دانشگاه فرهنگیان، نویسنده مسئول مقاله، a.soleymanpoor@cfu.ac.ir

۲. دانشجو معلم دانشگاه فرهنگیان

۱. مقدمه

از زمانهای قدیم، یکی از ابزارهای ارائه مفاهیم ریاضی و حتی غیرریاضی، ارائه نمودارها و استفاده از اشکال بوده است. بطور مثال، در مقطع ابتدایی اشکال یکی از ابزارهای مهم انتقال مفاهیم هستند[۱]. اما اینکه آیا در مقاطع بالاتر نیز این موضوع می‌تواند مصداق داشته باشد یا خیر؟ سوالی است که نیاز به بررسی دارد.

دانشمندان زیادی در جهان، روابط ریاضی زیادی را با رسم نمودارها بیان کرده و شکل رسم شده را به عنوان اثباتی برای رابطه‌ی مذکور تلقی می‌کنند. به این روش، روش اثبات بدون کلام[۲] می‌گویند[۱]. در این میان، عده‌ای اثبات بدون کلام را به عنوان یک اثبات ریاضی مورد قبول تلقی نکرده و آن را فقط یک توجیه هندسی می‌دانند. مثال‌های بررسی شده در این مقاله نشان می‌دهند که اثبات بدون کلام و روش نموداری گاهی برای انتقال مفاهیم اولیه و گاهی برای حل مسائل نسبتاً مشکل خیلی مناسب هستند. بطور مثال زمانیکه لازم نیست موضوعی ثابت شود این دو روش خیلی مناسب خواهند بود. از جمله این موارد، تدریس در مقاطع ابتدایی است. نشان خواهیم داد که در مقاطع بالاتر نیز جایگاه مناسبی برای این دو روش وجود دارد.

مجله انجمن ریاضی آمریکا MAA [۳]، مقالات یک صفحه‌ایی بنام اثبات بدون کلام و نیز مقالات ریاضی در سطوح مختلف را چاپ می‌کند. به عنوان نمونه، در [۵] با ترسیم یک شکل ثابت شده است که مجموع فاصله‌های هر نقطه داخل یک مثلث متساوی الاضلاع برابر با ارتفاع آن مثلث است. در تحقیق دیگری [۴] که در همین مجله چاپ شده است، ضمن معرفی اعداد لاح[۴]، مشتق مرتبه nام تابع e^{1-x} بدست آمده است[۴].

مجله دیگری که تحقیقات معلمین ریاضی را چاپ می‌کند، NCTM [۵]است. در [۶] نویسنده، در مورد هندسه‌ی ماتریس فیبوناچی[۶]، خواص مهمی را بیان و ثابت کرده است.

---

[۱]. حتی در این مقطع تعریف نیز وجود ندارد. زیرا هیچ موضوعی انتزاعی در این مقطع مفهوم ندارد و همه مفاهیم تجسمی‌اند.
[۲] Proof Without Words.
[۳] Mathematical Association of America.
[۴] Lah Numbers.
[۵] National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
[۶] Fibonacci.

واضح است نه تنها روش نموداری، بلکه هیچ روشی برای حل همه‌ی انواع مسائل کامل نبوده و نقاط ضعفی دارد. در این مقاله نقاط ضعف و قدرت روش نموداری بررسی می‌شوند.

۲. روش نموداری

در این بخش، روش نموداری از جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است و ضمن مثالهایی این جنبه‌ها بطور دقیق‌تر بیان می‌شوند.

تعریف: روش نموداری، روشی است که در آن برای بیان برخی مفاهیم ریاضی، توصیف رابطه‌ها و حل برخی از مسائل ریاضی فقط از نمودارهای ریاضی استفاده می‌شود.

روش نموداری، در سه مورد کلی بکار می‌رود که عبارتند از:

۱. بیان مفاهیم اولیه ریاضی. **۲.** توصیف رابطه‌ها (اثبات بدون کلام). **۳.** حل برخی از مسائل مشکل ریاضی.

هر یک از سه بند فوق را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱,۲. بیان مفاهیم اولیه ریاضی

همانطور که توضیح داده شد، یکی از ابزارهای انتقال مفاهیم ریاضی در مقاطع تحصیلی مختلف استفاده از اشکال است. اما بدیهی است که استفاده از نمودارها ابزاری برای انتقال مفاهیم در مقاطع بالاتر و گاهی حتی در دانشگاه می‌باشد.

برای مثال توجه داریم که در مقطع دبیرستان، زمانی انتقال مفهوم تابع تکمیل می‌شود که از نمودار ون استفاده کرده یا نمودار تابع رسم شود. نمودار تابع $y = f(x)$ قادر است رابطه بین متغیر مستقل x و متغیر وابسته y را بیان کند. تا زمانیکه نمودار f رسم نشود درک رابطه‌ی مذکور برای متعلمین مشکل خواهد بود.

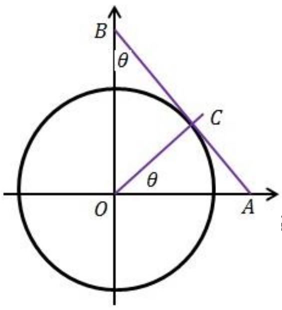
توجه خود را به تدریس تابع قدرمطلق با ضابطه $y = |x|$ متمرکز می‌کنیم. همواره تعریف این تابع به صورت زیر می‌باشد:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

و پس از آن مثالهای عددی زیادی حل می کنیم. اما با رسم نمودار این تابع درک این مفهوم که جواب قدر مطلق، به علامت داخل قدر مطلق بستگی دارد به آسانی صورت می گیرد.

به عنوان مثال دوم، تدریس مفهوم خط مجانب یک منحنی بدون رسم شکل کاری مشکل و غیرممکن خواهد شد. زیرا در این حالت منحنی به خط نزدیک و نزدیک تر می‌شود اما هرگز به آن نمی‌رسد. در این مورد حتی برای تکمیل درک مفهوم خط مجانب از رفتار دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ نیز استفاده می‌شود. نتیجه اینکه اثر نمودارها در مفاهیم اولیه، بر کسی پوشیده نبوده و کاملاً ضروری و لازم است.

مساله ۱. می‌خواهیم مفهوم دو نسبت مثلثاتی $\sec\theta$ و $\csc\theta$ را بیان کنیم و متعلمین با نسبت‌های مثلثاتی $\sin\theta$ و $\cos\theta$ و دایره مثلثاتی آشنا هستند. بهتر است از شکل زیر استفاده شود.



در این شکل دایره‌ی رسم شده دایره‌ی مثلثاتی به شعاع واحد است. می‌توان نوشت:

$$\cos\theta = \frac{OC}{OA} = \frac{۱}{OA} \Rightarrow OA = \frac{۱}{\cos\theta} (= \sec\theta)$$

$$\sin\theta = \frac{OC}{OB} = \frac{۱}{OB} \Rightarrow OB = \frac{۱}{\sin\theta} (= \csc\theta)$$

بدین ترتیب طول پاره‌خط OA همان $\sec\theta$ و طول پاره‌خط OB برابر $\csc\theta$ می‌باشد. در شکل فوق توجه داریم که زاویه OBA به این علت با θ برابر است که اضلاع متناظر OBA و COA برهم عمود هستند. در حالت کلی اگر دو زاویه‌ی دارای اضلاع متناظر عمود باشند با هم برابرند![۱]

■

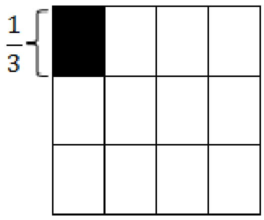
[۱] توسط تشابه مثلث‌ها می‌توان این حکم را ثابت کرد.

به عنوان نمونه دوم، نمودار ون در تدریس مفهوم تابع شاهد دیگری برای استفاده از روش نموداری در انتقال مفاهیم می‌باشد.

مساله ۲. می‌خواهیم در ابتدایِ تدریسِ تقسیم کسرها در مقطع ابتدایی ابتدا عمل تقسیم را با شکل ارائه دهیم. تقسیم های زیر را بصورت مفهومی و با استفاده از شکل بیان کنید:

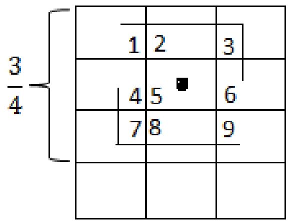
$$(۱)\quad \frac{۱}{۳} \div ۴ \qquad\qquad (۲)\quad \frac{۳}{۴} \div \frac{۱}{۳}$$

جواب) ابتدا تقسیم (۱) را انجام می‌دهیم. برای عمل تقسیم کسرها یک مربع به طول ضلع یک واحد رسم می‌کنیم و سپس به‌طور عمودی یا افقی آن را به ۳ (مخرج کسر اول) قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. سپس از ضلع دیگر مربع، قسمت $\frac{۱}{۳}$ و سپس کل مربع را به ۴ (کسر دوم) قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. درنتیجه قسمت هاشور خورده جواب مساله است که $\frac{۱}{۱۲}$ می‌باشد. پس:



$$\frac{۱}{۳} \div ۴ = \frac{۱}{۱۲}$$

برای حل (۲) ابتدا یک ضلع مربع واحد را به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم سپس ضلع دیگر مربع را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کرده و مخرج‌ها را یکسان می‌کنیم: $\frac{۹}{۱۲} \div \frac{۴}{۱۲}$



اکنون $\frac{۹}{۱۲}$ مربع عبارتست از شماره‌های ۱ تا ۹، جواب تقسیم عبارتست از اینکه در داخل $\frac{۹}{۱۲}$ چند تا $\frac{۴}{۱۲}$ وجود دارد. جواب می‌شود ۲ تا و $\frac{۱}{۴}$ پس:

$$\frac{۹}{۱۲} \div \frac{۴}{۱۲} = ۲\frac{۱}{۴} = \frac{۹}{۴}$$

نمونه‌های فراوانی می‌توان در کتب درسی مقاطع مختلف تحصیلی یافت که نشان دهنده تاثیر نمودار در انتقال مفاهیم هستند. لذا از ذکر نمونه‌های دیگر خودداری می‌کنیم.

۲,۲. توصیف رابطه‌ها (اثبات بدون کلام)

در این بخش، می‌خواهیم تاثیر روش نموداری را در توصیف رابطه‌های ریاضی بیان کنیم. اما این تاثیر بدون ذکر مثالها بی‌معنی خواهد شد. در توصیف رابطه‌ها، هدف ما حل یک مساله ریاضی نیست بلکه منظور از توصیف، بیان علت بفرم هندسی بوده یا یک مقایسه است.

بطور مثال آیا می‌توان بدون شکل و براحتی گفت که کدامیک از اعداد e^{π} یا π^{e} (e عدد نپر و π عدد پی است) بزرگتر و کدامیک کوچکتر است؟ واضح است که پاسخ منفی است. (برای دیدن نموداری که مقایسه این‌دو را انجام می‌دهد به [۱] مراجعه شود.)

اهداف این فصل را در قالب مسائل و حل آنها، بیان می‌کنیم.

مساله ۳. کدام یک از اعداد x یا $\sqrt{x}$ بزرگتر است؟ ($x > ۰$)

جواب) در پرسش از گروه دانش‌آموزی در مقاطع بالاتر از دوم دبیرستان، اکثر دانش‌آموزان جوابهای متنوع و بدون دلیل بیان می‌کنند و اکثراً $\sqrt{x}$ را کوچکتر از x می‌دانند! شکل $p_۱$ مقایسه این دو نمودار را نشان می‌دهد.

$$۰ < x < ۱ \ \Rightarrow \ \sqrt{x} > x \quad , \quad x > ۱ \Rightarrow \sqrt{x} < x \quad , \quad x = ۱ \ \Rightarrow \sqrt{x} = x$$

مساله ٤. دامنه تابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{x}}} \qquad (۱)$$

جواب) برای پیدا کردن دامنه تابع (۱) بهتر است با استفاده از دامنه تابع ساده‌تری چون $g(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$ مساله را حل کنیم.

$$D_g : x - \sqrt{x} \geq ۰ \quad \Rightarrow x \geq \sqrt{x}$$

در نتیجه بنابه شکل۲ داریم: $D_g = [۱,\infty)$.

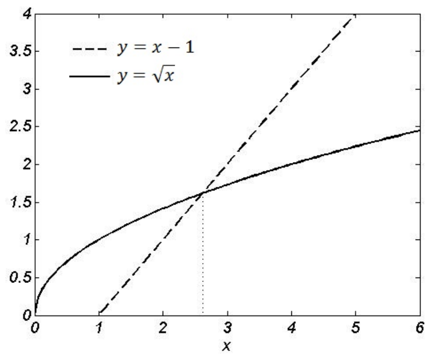
حال دامنه تابع (۱) را بررسی می‌کنیم: با استفاده از تغییر متغیر $A = x - \sqrt{x}$ داریم:

$$g(A) = \sqrt{A - \sqrt{A}} \quad \Rightarrow D_g = [۱,\infty) \equiv A \geq ۱$$

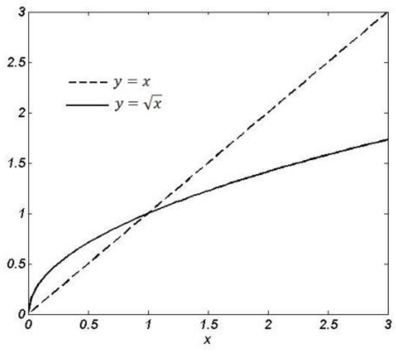
$$A = x - \sqrt{x} \geq ۱ \quad \Rightarrow x - ۱ \geq \sqrt{x} \qquad (۲)$$

اکنون برای رسیدن به D_f، باید نامعادله (۲) حل شود. برای حل این نامعادله توابع موجود در سمت راست و چپ آن را رسم کرده و سپس با مقایسه نمودار آنها جواب حاصل می‌شود. شکل۱ نمودار هر دو طرف را در یک دستگاه نشان می‌دهد. برای یافتن نقطه‌ی تقاطع دو نمودار داریم: $x - ۱ = \sqrt{x} \to x = \frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$

در نتیجه دامنه تابع f برابر است با: $\left[\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲},\infty\right)$ و توجه داریم که $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} = ۱ + \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ همان نسبت طلایی است.



شکل۱



شکل۲

برای ادامه مقایسه‌ها یک حالت کلی را در نظر می‌گیریم. همانطور که دیدیم مقایسه بین دو نمودار x و $\sqrt{x}$ موجب حل مساله‌ای مانند مساله ۳ شد. پس حالت کلی می‌تواند شامل مقایسه نمودارهای توابع اولیه باشد، بطوریکه توسط آنها مسائل ریاضی زیادی قابل حل خواهد بود. بیان حالت کلی مقایسه در مساله زیر انجام می‌شود که بهتر است خود دانش آموزان و به صورت انفرادی آن را انجام دهند.

مساله۵. توابع زیر را از نظر بزرگی دوبه‌دو با هم مقایسه کنید (با رسم نمودار).

$$x\,,\quad x^n\,,\ \sqrt{x}\,,\ |x|\,,\ \sin x\,,\ \cos x\,,\ \log x\,,\ [x]$$

جواب به این مساله، موجب می‌شود دانش‌آموزان دید درستی نسبت به توابع داشته و همچنین در حل مسائل آتی به‌راحتی روش نمودار را به‌کار ببرند. این مساله در کلاس درس حسابان در طول درس تابع باید توسط خود دانش‌آموزان بررسی شود. می‌توان این مساله را در دروس دیگر نیز در درسهایی که تابع تدریس می‌شود بیان کرد.

۳,۲. حل مسائل ریاضی

یکی‌دیگر از مزایای روش نموداری حل برخی از مسائل ریاضی و رسیدن به جواب از طریق نمودار است. در این حالت، رسم نمودار موجب می‌شود تمام ابعاد مساله را روشن کرده و در نتیجه در مورد رسیدن به جواب مساله تمام حالت‌های ممکن در نظر گرفته شوند. از جمله کاربرد روش نموداری در حل مسائل ریاضی می‌توان به مساله‌های زیر اشاره کرد.

مساله٦. در ماشین حساب، یک عدد حقیقی مثبت مانند $a\epsilon\mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید با فشار دادن دکمه $\sqrt{}$ از آن جذر گرفته می‌شود. اگر این دکمه را به تکرار فشار دهیم نهایتا به عدد یک می‌رسیم. علت این نتیجه چیست؟

جواب) روش اول: نمودار x و $\sqrt{x}$ را به صورت شکل۴ در نظر می‌گیریم. پاسخ با توجه به این شکل، در حالتی که نقطه شروع بزرگتر و کوچکتر از یک باشد واضح است.

روش دوم: دنباله‌ی بازگشتی $a_۰ = a\ ,\ a_{n+۱} = \sqrt{a_n}$ را در نظر گرفته و نشان می‌دهیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۱$.

عدد a یا بزرگتر از ۱ است یا کوچکتر از ۱. با توجه به رابطه زیر

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{\sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{۱}{\sqrt{a_n}}$$

زمانیکه $a > ۱$، دنباله حاصل نزولی و زمانیکه $a < ۱$، صعودی است. در نتیجه $\{a_n\}$ یکنواست. همچنین به ازای هر $n\epsilon\mathbb{N}$ داریم $|a_n| \leq a + ۲$. پس $\{a_n\}$ همگراست. در نتیجه :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = k \;\to\; \lim_{n\to\infty} a_{n+۱} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} \;\to\; k = \sqrt{k} \;\to\; k = ۰ \text{ یا } ۱ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = ۱$$

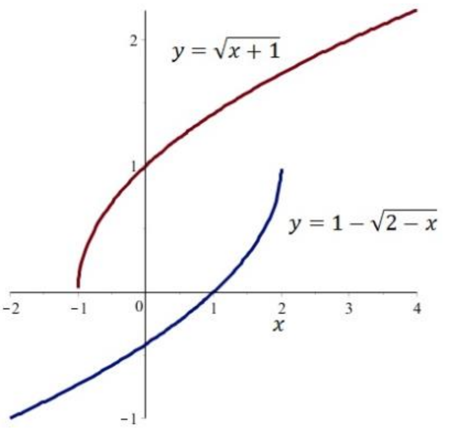
واضح است که در حل این مساله شکل، خیلی راحت‌تر همگرایی دنباله را در حالات مختلف نشان می‌دهد.

مساله۷. نامعادله های زیر را حل کنید.

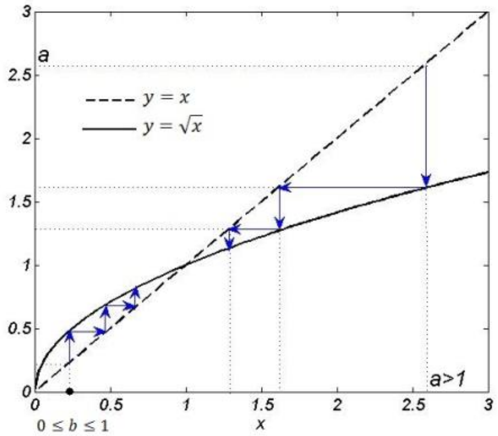
$$(۱)\;\sin x < \cos x \quad , \quad (۲)\;\sqrt{x+۱} > ۱ - \sqrt{۲ - x}$$

شماره‌ی (۲) را بررسی می‌کنیم. ابتدا توجه داریم که در تدریس رسم نمودارها از طریق انتقال نمودار تابع $\sqrt{۲ - \mathrm{x}}$ را نمی‌توان مستقیماً از روش انتقال نمودارها حل کرد. زیرا این نمودار برحسب نمودار $\sqrt{x}$ قابل رسم نیست. باید ابتدا آن را بصورت $\sqrt{-(x - ۲)}$ نوشته سپس ابتدا نمودار $\sqrt{x}$، سپس نمودار $\sqrt{-x}$ و نهایتاً نمودار $\sqrt{-(x - ۲)}$ رسم شود. حال توسط شکل۳ جواب نامعادله حاصل می‌شود. توجه داریم دامنه مشترک $[-۱, ۲]$ بوده و همه این بازه جواب نامعادله(۲) است. نامعادله (۱) نیز بطور مشابه حل می‌شود.

■



شکل۳



شکل۴

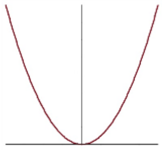
۳. محاسن و معایب روش نموداری

می‌دانیم هر روشی برای حل مسائل یا ارائه مفاهیم ممکن است دارای نقاط ضعف و قوت باشد. تنها مهارت لازم در استفاده از روش‌ها این است که آنها را در جای مناسب و زمانی بکار ببریم که نقطه قوت آنها است.

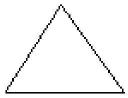
در رابطه با محاسن روش نموداری در فصل قبل از سه جنبه مختلف مواردی ذکر شد. در واقع نقاط قوت روش نموداری در بیان مفاهیم، اثبات بدون کلام و حل مساله‌ها بوضوح دیده شد. اما روش نموداری چه معایب یا آسیب هایی ممکن است داشته باشد؟

در رابطه با بکارگیری روش نموداری، در مواردی که در فصل قبل بحث شد هیچ نقاط ضعفی وجود ندارد. اما در آسیب‌شناسی روش نموداری می‌توان گفت مواردی وجود دارد که در آنها یا نمی توان این روش را استفاده کرد و یا اگر استفاده کنیم به یک جواب نادرست خواهیم رسید. از جمله مواردی که نمی‌توان روش نموداری را بکار برد می‌توان به مسائل زیر اشاره کرد:

از جمله مواردی که استفاده از نمودار ظاهرا مقدور است اما به یک جواب نادرست منتهی می‌شود می‌توان به مساله‌های زیر اشاره کرد:

مساله۸. از دانش‌آموزان می‌پرسیم که نمودار چه تابعی، شکل مقابل  است؟

جواب) با توجه به اینکه دانش‌آموزان نمودار تابع $y = x^۲$ را همواره به صورت سهمی در ذهن دارند، ممکن است با دیدن نمودار تصور کنند که نمودار مربوط به $y = x^۲$ است در حالیکه نمودار های $y = x^{۲n}\ , n \in \mathbb{N}$ همگی شکلی شبیه به نمودار مقابل دارند. پس رسیدن به جواب از روی شکل موجب ایجاد خطا می‌شود.

مساله۹. مثلث روبه‌رو چه نوع مثلثی است؟ 

جواب) با نگاه کردن به مثلث بالا به نظر می رسد که مثلث متساوی الاضلاع است. اکثر دانش آموزان همین جواب را بیان می کنند در حالیکه تا اندازه‌های اضلاع مشخص نباشد نمی توان گفت شکل، متساوی الاضلاع است. زیرا چشم ما قادر به تشخیص اندازه‌های خیلی کوچک نیست.

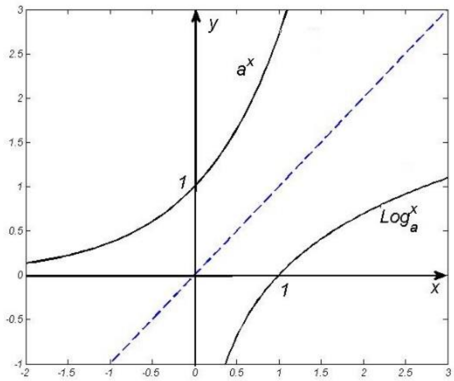
مساله۱۰. آیا معادله زیر به ازای $a > ۰$ جواب دارد؟

$$\log_a x = a^x$$

اگر نمودارهای هر دو تابع $y_۱ = a^x$ و $y_۲ = \log_a x$ را در یک دستگاه رسم کنیم شکل۶ حاصل می‌شود. نمودار بیان‌کننده‌ی این است که این‌دو نمودار نمی‌توانند تقاطع داشته باشند و درنتیجه به‌ازای هر $a > ۰$ معادله‌ی مورد نظر دارای ریشه نمی‌باشد. اما این نتیجه درست نیست. در واقع به‌ازای $a = e^{\frac{۱}{e}}$ معادله حاصل دارای ریشه‌ی $x = e$ بوده (یک ریشه دارد) و به‌ازای $۱ < a < e^{\frac{۱}{e}}$ دارای دو ریشه است و به‌ازای $a > e^{\frac{۱}{e}}$ ریشه ندارد.

همچنین به ازای $\circ < a < 1$ فقط یک ریشه وجود دارد.

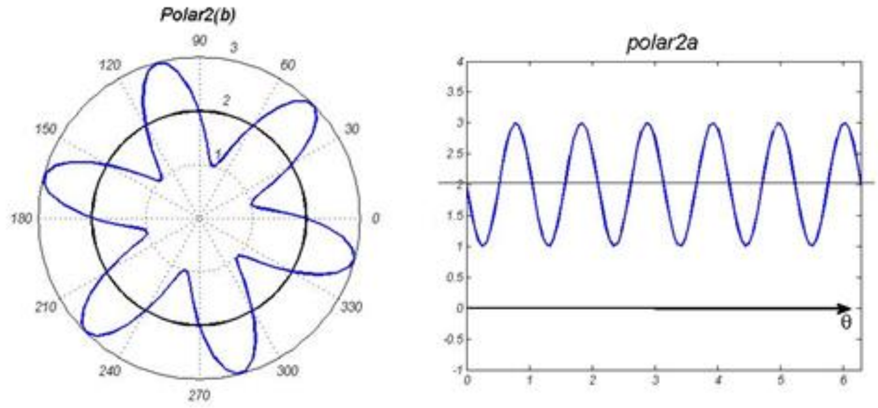
■



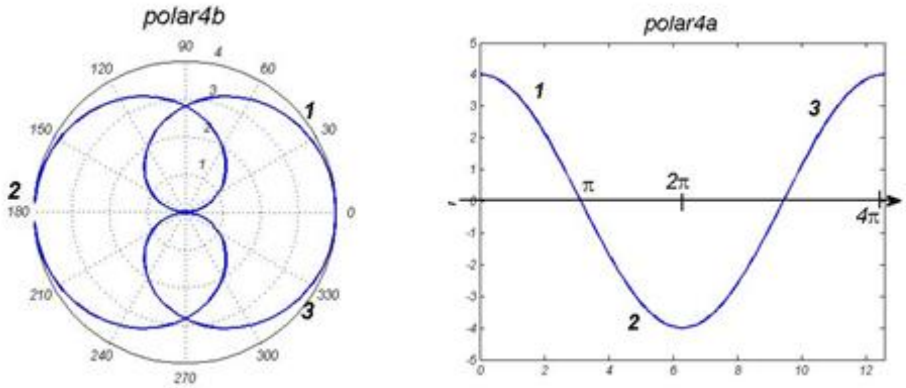
شکل۶

محاسن و معایب روش نموداری را با مثالهای ساده و کاربردی که غالباً از دوره‌ی متوسطه بودند بیان کردیم. اکنون برای اینکه اثر روش نموداری در ریاضیات عالی نیز دیده شود یک کاربرد و یک عدم کاربرد از روش نموداری در دوره‌ی عالی بیان می‌کنیم.

مساله ۱۱. از کاربردهای روش نموداری به تدریس مختصات قطبی اشاره می‌کنیم. این موضوع در مقاله‌ی [۳] ارائه شده‌است اما خلاصه ای از آن را با یک مثال ارائه می‌دهیم. به دو رابطه‌ی قطبی $r_1 = 1 - cos(2\theta)$ و $r_2 = 4\,cos(\frac{\theta}{2})$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم رسم نمودارهای r_1 و r_2 نیاز به بررسی تقارن‌ها، تقاطع‌ها و یافتن زوایا و مقادیر r متناظر آن زوایا می‌باشد. اما می‌توان برای راحتی کار این روابط را در یک دستگاه مختصات دکارتی (یعنی r برحسب θ رسم شود) رسم کرد و سپس توسط نمودار دکارتی، نمودار قطبی را رسم کرد. نمودارهای قطبی و دکارتی r_1 در شکل۷ و نمودارهای دکارتی و قطبی r_2 در شکل۸ دیده می‌شوند:



شکل۷: نمودار های دکارتی و قطبی مربوط به $r_۱ = ۱ - \cos(۲\theta)$.



شکل۸: نمودارهای دکارتی و قطبی مربوط به $r_۲ = ۴\cos(\frac{\theta}{۲})$.

■

مساله ۱۲. از مواردی که کاربرد روش نموداری با مشکل مواجه می‌شود نمونه دیگری ذکر می‌کنیم. فرض کنید برای تابعی مانند $y = f(x)$ داریم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ در این صورت در مورد جواب حد $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ چه می‌توان گفت؟ اگر داشته باشیم $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = ۰$ آنگاه در مورد حد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ چطور؟

جواب) در پاسخ به این سوال هر شخص توابع مختلفی را بطور نموداری تصور می‌کند که مجانب افقی دارند. در همه‌ی این تصورات رابطه دوشرطی زیر برقرار است:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \iff \lim_{x\to+\infty} f'(x) = ۰ \qquad (۳)$$

آیا پاسخ سوال درست است؟ به عبارت دیگر آیا رابطه (۳) به‌ازای همه‌ی توابع پیوسته برقرار است؟ پاسخ منفی است. توجه داریم که این نتیجه‌ی نادرست از نمودارهای مختلفِ توابعِ دارای مجانب افقی حاصل شده است. برای مثال فرض کنید:

$$f(x) = e^{-x}\sin(e^{۲x})$$

برای تابع f داریم $\lim_{x\to+\infty} f(x) = ۰$ ولی با محاسبه مشتق، معلوم می‌شود که $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \neq ۰$.

برای بررسی شرایط عکس، تابع $g(x) = \sin(\log_e x)$ را در نظر می‌گیریم. باتوجه به رفتار توابع $\ln x$ و $\sin x$ درمی‌یابیم که $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ وجود ندارد و نوسانی است. اما:

$$g'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x} \to ۰$$

در نتیجه رابطه‌ی (۳) در حالت کلی حتی از یک طرف نیز برقرار نمی‌باشد. در حالی که تصور ذهنی ما ابتدا صحت آن‌را نشان می‌داد. در واقع می‌توان گفت با اعمال شرایطی اضافه می‌توان گفت که رابطه (۳) از یک طرف برقرار است. این موضوع در لم زیر آمده‌است.

لم (باربالات[۱]): اگر تابع مشتق‌پذیر $f(x)$، هنگامی‌که $x \to +\infty$ میل کند، یک حد متناهی داشته باشد و اگر f' به‌صورت یکنواخت پیوسته باشد، آنگاه هنگامی‌که $t \to +\infty$. خواهیم داشت:

---

[۱] .Barbalat ‘s Lemma.

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = ۰$$

اثبات) به مرجع [۲] مراجعه شود.

توجه داریم که لم فوق با اعمال پیوستگی یکنواخت ثابت می‌کند که اگر f حد متناهی (مجانب افقی) داشته باشد آنگاه حد f' نیز صفر است. اما توجه داریم که پیوستگی یکنواخت از روی نمودار یک تابع و با چشم قابل تشخیص نیست. با بیان یک مساله باز[۱] این قسمت را به پایان می‌رسانیم.

مساله ۱۳. می‌دانیم مشتق اول یک تابع f'، با توجه به شکل قابل توجیه است و مقدار صعودی و نزولی را نشان می‌دهد. در واقع علامت f' به صعودی یا نزولی بودن f مربوط است. مشتق مرتبه دوم f''، از روی نمودار قابل تفسیر بوده و میزان تقعر منحنی را نشان می‌دهد. می‌خواهیم بدانیم چه تعبیر ریاضی می‌توان به مشتق سوم $f'''(x)$ بیان کرد؟ آیا تعبیر فیزیکی بعد از شتاب برای آن می‌توان گفت؟

■

٤. نتیجه گیری

در این مقاله، محاسن و معایب روش نموداری توضیح داده شد. یک نتیجه واضح این است که روش نموداری در تمام مقاطع از دبستان تا آموزش عالی به‌کار می‌رود. در هر مقطع به یک میزان می‌توان از روش نموداری استفاده کرده و حتی آسیب هایی وجود دارد. ما نباید از روی نمودار یک تابع به ضابطه‌ی آن برسیم مگر اینکه اطلاعات کافی ذکر شده باشد. اندازه‌های دقیق ریاضی غالباً با نمودار تحلیل‌پذیر نیستند مانند طول‌های گنگ (اصم) که توسط خط‌کش جدایی‌پذیر نیستند. نتیجه نهایی اینکه روش نموداری می‌تواند از سه جنبه‌ی بیان مفاهیم اولیه، توصیف رابطه‌ها و نامساوی‌ها و حل برخی از مسائل ریاضی کمک بلاتصوری در امر آموزش داشته باشد. اما تمام روش‌های موجود دارای نقایصی هستند که روش نموداری نیز از این قاعده مستثنی نیست.

منابع

---

[۱] .Open Problem.

[1]. راجرب. نلسن، **اثبات بدون کلام**، مترجم سپیده چمن‌آرا، موسسه انتشارات فاطمی، چاپ دوم، ۱۳۷۵.

[2]. ژان–ژاک ا. اسلوتین، و. لی، کنترل غیرخطی کاربردی، ترجمه محمدرضا ه. گلپایگانی، منوچهر احمدوند، امیر ه. جعفری، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ دوم، ۱۳۸۹.

[3]. سلیمانپور ب. ا.، نوین ر. سهرابی ز.، **رسم روابط قطبی با استفاده از مختصات دکارتی**، چهل و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران ۴ الی ۷ شهریور ۱۳۹۳ دانشگاه سمنان.

[۴]. Daboul. S,J. Mangaldan, M. Z. Spivey, P.J. Taylor, The Lah Numbers and the n th Derirative of e^{1-x}, MAA, Mathematics Magazine, Vol. ۸۶, No. ۱ (Feb, ۲۰۱۳), pp. ۳۹- ۴۷.

[۵]. Tanton. J, Proof without words: Equilateral Triangle, Mathematical Association of America, Math Magazine, Vol. ۷۴, No. ۴ (oct. , ۲۰۰۱) , p.۳۱۳.

[۶]. Triplett. S, Geometry of the Fibonacci Matrix, NCTM, The Mathematics Teacher, Vol. ۱۰۷, No. ۳ (Oct. ۲۰۱۳) ,pp. ۲۳۲- ۲۳۷.