

فراکتال آرت و هنر نرم افزاری با نگاه به هندسه ی محاسباتی و هندسه نقوش

مهگان فرهنگ^۱، صفیه رضایی^۲

چکیده

ارتباط هنر و دنیای علم به ویژه هنر ریاضیاتی و هندسی هنر نرم افزاری امروزه از جمله مواردی است که علاوه بر حوزه ی مطالعات زیبایی شناختی هنر قرار گرفته، در میان مطالعات اجتماعی هنر نیز می تواند قرار بگیرد. فراکتال یک هنر بین رشته ای است و زاینده ی کامپیوتر است، با هندسه، الگوریتم و ریاضیات در ارتباط است. از فرم های کیهانی بر داشت می کند و برگرفته از اصول هنر کلاسیک نیز می باشد. فراکتال ها چیزی جدای از نقوشی که برای ما آشناست، نمی باشد. با شکل گیری دوران پست مدرن فراکتال ها به طور رسمی پا به عرصه ظهور گذاشتند. در فراکتال ها دنیای علم، نظم هندسی، به چالش کشیدن همین نظم هندسی و نمودی از هم زیستی و در هم فرو رفتگی دو پدیده ی نظم و آشوب (Chaos) است. هنر فراکتال نوعی زبان برای بیان نظم و بی نظمی در دنیا پست مدرن است. همه ی این موارد در دنیای دیجیتال، وجود کامپیوتر و به عبارتی هنر نرم افزاری هویت بیشتر دارند و تعریف خود را ارایه می دهند.

واژگان کلیدی: فراکتال، هنر نرم افزار، هندسه، هنر ریاضیات، نقوش.

^۱ . کارشناسی ارشد گرافیک، مدرس گروه هنر، دانشگاه فرهنگیان، Mahgan.farhang1976@gmail.com

^۲ . عضو هیات علمی دانشگاه فرهنگیان .

مقدمه

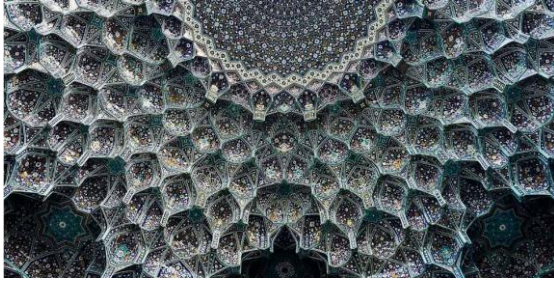
دنیای دیجیتال و سرعت علم امروز با هنر همسو شده و ما به راحتی ورود و تعامل علم و هنر را احساس میکنیم. اگرچه این پدیده ای جدید نیست. ابتدایی ترین هنرها بشر همواره بر اساس یک هندسه و قواعد علمی استوار بوده است. خلقت انسان نیز بر مبنای علم تناسب بوده است. دنیای علم همان جهانی است که با علم ریاضیات، فیزیک، شیمی، زیست، زیبایی شناسی و... ارتباط دارد. دنیای دیجیتال امروزه با صفرها و یکها شکل گرفته است. امروزه دیجیتالی شدن یا نرم افزاری شدن همه وابسته به دنیای اعداد و تناسب ریاضی می باشد. در این نوشتار به هنر فراکتالی پرداخته میشود. فراکتال گونه ای از هنر هندسی است با رویکردی الگوریتمی.

فراکتال آرت را می توان در زمره ی هنر نرم افزاری قلمداد نمود. هنری که بر اساس نسبت ها، تساوی ها و تقارن ها و گاه الگوها و الگوریتم های تصادفی به گونه ای حرکت کرده که فرم های انتزاعی را پدید می آورد. (گروسی، مهرداد. ۱۳۸۷: ۱۲۰).

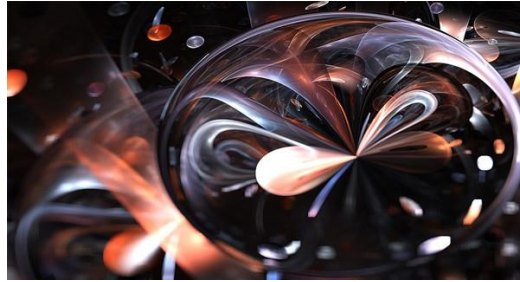
فراکتال آرت در هندسه ی نقوش سنتی، در طبیعت، در آسمان شب و کهکشان، در تصاویر علمی از کلیه ی آزمایش های فیزیک و شیمی دیده می شود. هندسه ی منظم از فراکتال آرت در کلیه ی نقوش هندسی و مذهبی نیز دیده میشود. اما آنچه بیشتر اهمیت دارد این است که فراکتال ها در زمره ی هنرهای نرم افزاری میباشند که در امتداد تاریخ هنر بوجود آمده اند. آنچه در فراکتال مهم است، نقوش و هندسه می باشد. هندسه ی منظم نامنظم اساس شکل گیری جهان و حتی هنر است. وجود هندسه باعث بوجود آمدن بسیاری از آثار برتر دنیاست. تقارن، توازن، تعادل گاهی در هنر دنیای معاصر تعریف جدی و محکمی ندارد اما در هنر فراکتال بسیار جدی است. هندسه ی کلاسیک و قانونمند و هندسه ی تصادفی در فراکتال آرت ها وجود دارد.

مفاهیمی که از هندسه ی تصادفی (stochastic Geometry) برگرفته است و آن عبارتست از: آنروپی و تکرار، چرخش و فضای حلقوی (مدارات سیاره ها در کهکشان)، تکرار، تصادف و جهش، حافظه، ذخیره و پایگاه داده، کنش، پاسخ، تعامل (تقی زادگان، معصومه. ۱۳۹۴: ۱۵).

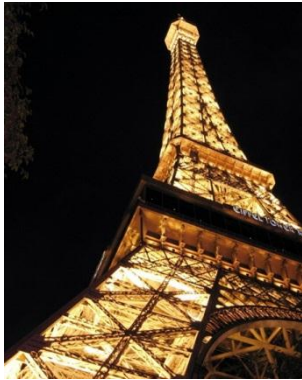
اینکه آیا ارتباطی بین هنر نرم افزاری و فراکتال وجود دارد یا نه؟ چقدر هندسه و نقوش هندسی در فراکتال ها دیده می شوند؟ آیا فراکتال ها، دنیای دیجیتال و هنر نرم افزاری بر پایه ی اصول و مبانی هنر هستند؟ آیا علوم پایه و هندسه در فراکتال آرت ها نقشی دارند؟ همه ی این پرسش ها در این نوشتار بررسی و پاسخ داده خواهد شد.



تصویر ۱- فراکتال و نقوش سنتی و اسلامی



تصویر ۲- فراکتال و فرم های حلقوی و کیهانی



تصویر ۳ و ۴- هندسه و فراکتال در معماری کلاسیک

هنر نرم افزاری و فراکتال

در تعریف فراکتال آرت اینگونه می توان گفت که فراکتال آرت عرصه ی نوینی از هنر نرم افزاری است که بر مبنای الگوریتم می باشد. فراکتال از واژه لاتین fractum یا fractus به معنی شکسته برگرفته شده بر خاصیت قطعه قطعه شونده این فرم ها تاکید می کند. در فارسی هم معادل فراکتال پیشنهاد شده.

کامپیوتر آرت و هنر های الگوریتمی زاینده ی کامپیوتر است که طی دهه های اخیر دریچه ی نوینی به سمت دنیای تصویر سازی هنرمندانه و ریاضیاتی گشوده، که مهارت در آن، هم نیازمند زیبایی شناسی هنرمندانه و مستلزم بهره مندی از مقادیر هنگفتی ریاضیات و هندسه ی مدرن فراکتالی است (گروسی، ۱۳۸۷: ۲۰).

فراکتال آرت در میان هنر های نرم افزاری از بستر ریاضیاتی یا به عبارتی هندسی بسیار قوی برخوردار است. پیشینه ی این هنر به قدمت تاریخ هنر و علم بر می گردد. اما در دوران معاصر بین رشته ای شدن های علوم، گسترش علم و تکنولوژی و تاثیر گذاریشان بر یکدیگر فراکتال آرت قدرت بیشتری پیدا کرد.

پل والر می گوید: علم و هنر نام هایی ناهنجار هستند که سخت با هم در تقابلند ولی در واقع آن ها جدایی نا پذیرند (استرازبرگ، ۱۳۸۳: ۲۰).

این سخن در ظاهر درست است. اما تعامل و تاثیر هنر و علم همواره وجود داشته و دارد. تاریخ علم و هنر به همان نسبت در آثار میکال آنژ و لیوناردو داوینچی دیده می شود که در آثار دانشمندی چون کپرنیک این هنر نیز از قرن ۱۹ دارای هویت و اعتبار شد.

نقوش بویژه نقوش سنتی و هندسه همواره از هندسه ی خاص خود و تناسب استفاده کرده اند. همه پر از قوانین ریاضی و شکل هایی از عالم فیزیک هستند. این نقوش در تکرار شدنشان باز فرم های جدید و تعریفی جدید می رسند که می توان آن ها در فراکتال ها دید.

با ظهور ریاضیات فراکتالی در مقابل ریاضیات و هندسه ی سنتی اقلیدسی که مبنای تمام تفمرات ریاضیاتی علمی و همچنین مولد اساسی فعالیت های کامپیوتری بود که به عنوان برابری ریاضیاتی اندیشه ها و فلسفه های پیچیدگی و آشوب، پدیده ی فراکتال مطرح شد و از دیگر سو این مفهوم چشم انداز

ریاضیاتی و هندسی نوین از طبیعت و هستی در قالب نرم شگفت آوری بنام فراکتال آرت ظهور کرد (گروسی. ۱۳۸۷: ۲۲).

هندسه، محاسبات، فضای کلان، فضای سایبری و ... از موارد مهم و اصلی فراکتالی می باشد و باز هندسه، محاسبات، تناسبات و شیوه های محاسباتی از ارکان هنرهای کلاسیک و سنتی. شرایط مشابهی در مورد فراکتال ها وجود دارد. نگاهی به فعالیت های اخیر علم فیزیک نشان دهنده ی تنوع پدیده های طبیعی چون خطوط محیطی، ابرها، سطوح زمین، خطوط ساحلی، جنبش مایعات و... است که به عنوان فراکتال شناخته می شوند (Falconer, Kenneth: xxvi).

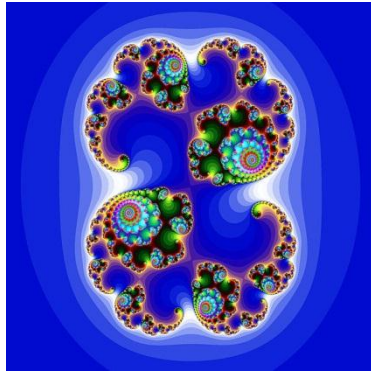
هنر نرم افزاری را چگونه می توان دریافت کرد؟ اینکه آیا اصلا هنر نرم افزاری هنر است؟ هنر نرم افزاری چیز جدای از هنر نیست. در ادامه ی تاریخ هنر و علم بوجود آمده است و میتوان آن را نوعی هنر انتزاعی نیز نامید. در آثار هنرمندان فراکتال آرت گاه اصول هندسی سنتی دیده می شود، به عبارتی نوعی بنیاد گرای هندسی در آثارشان دیده می شود. شاید بتوان تصاویر آپ آرت را به عنوان پایه های معرفی این هنر به طور رسمی دانست. جنبش های هنری قرن بیستم و جدید نقش عمده ای در هویت و شکل دهی به هنر نرم افزاری و فراکتال ها داشته اند. از این رو فراکتال ها را خیلی نمی توان جدید به حساب آورد. آن ها همان هنر هندسی، الگوریتمی می باشند، که جدای از اصل هنر در طول تاریخ نبوده است.

هنرهای الگوریتمی و زایشی، مبتنی بر خود به خودی خلق هنر است و هنرمند به عنوان زمینه ساز یا برنامه نویس قبل از مراحل ارایه اثر حضور دارد، اما در هنگام خلق و ارایه اثر حذف می شود. ایده ی حذف هنرمند در آثار هنرمندان دادایست، مطرح شد. دادایست ها به دنبال تنوع و ابداعات خود انگیخته بودند (بکولا. ۱۳۸۷. ۳۰۷).

در فراکتال ها می توان تکرار، تعامل، تصادف، خود ویرانگری، حذف هنرمند و خود انگیختگی، دنیای علم (شکل های آمیبی، درات میکروسکوپی، دنیای نجوم و کیهانی) و انتزاع و بیو مورفیک را دید. تمامی ان موارد در هنری بنام هنر نرم افزاری، هنر دیجیتال و فراکتال آرت وجود دارد که با یکدیگر همسو می باشند (تصاویر ۶ و ۷ و ۸ و ۹).



تصویر ۶ - فراکتال و دنیای دیجیتال برگرفته از فرم های طبیعت



تصویر ۷- فراکتال تکرار نظم. بزرگ و کوچک شدن نقش



تصویر ۸و ۹- فراکتال و دنیای دیجیتال برگرفته از فرم های طبیعت

دنیای دیجیتال و فراکتال

اندرو دارلی تذکر میدهد که بسیاری از تکنولوژی‌ها و تکنیک‌های دیجیتال در ابتدا به قصد مصارف زیبایی شناسانه خلق شده بودند (۱۲: ۲۰۰۰ . DARLEY).

آثار دیجیتال نوع دیگری از هنر هستند، ثبت تصویری، کنش‌ها یا اتفاق‌ها و بازپخش آن برای مخاطبان به راحتی فراهم میشود. در اینجا دیجیتال یک رسانه یا ابزار مستقل هنری میباشد که از دنیای تکنولوژی و صفر و یک‌ها کمک میگیرد. جهانی شدن در دنیای امروز، حضور شبکه‌های رسانه‌ای، استفاده‌ی بسیار از اینترنت و زندگی در میان دنیای ارتباطات و دیجیتال و از همه مهمتر ظهور دهکده جهانی به عنوان جزیی از پیشگویی مک لوهان زمینه را برای توسعه و تقاضا در این رابطه بیشتر کرد. هنرمندان هنر دیجیتال با ادبیات دیجیتال به عنوان بخشی از زندگی خود رشد کرده‌اند. آن‌ها تصویری از جهان بدون اینترنت، لپ‌تاپ، موبایل یا ایمیل ندارند. البته باید به این نکته اشاره کرد که بعضی از این تکنولوژی‌ها به ما کمک می‌کند که حضور روزانه خود را شکل دهیم. به معنای دقیق کلمه، این هنرمندان اعتنایی به ساخت اثر یا ابزار دیجیتال به عنوان چیزی متفاوت از به کار بردن ابزارهای سنتی ندارند (واندز. ۲۰۰۶: ۱۴).

هنر دیجیتال امروزه به رشد خود رسیده و در موزه‌ها و گالری‌ها دیده و ارایه می‌شود و نسل امروز با این هنر تعامل دارد. این هنر به آهستگی با افق هنر معاصر ادغام می‌شود، همانطور که تفاوت‌های درک شده میان هنر دیجیتال و هنر معاصر محو می‌شود. ما در یک دوره‌ی انتقالی هستیم. هنرمندان، جهان بدون کامپیوتر را نمیشناسند و تمایز گذاشتن میان هنر تولید شده بوسیله‌ی تکنولوژی و دیگر گونه‌های هنر معاصر را دور از ذهن می‌دانند (تقی زادگان. ۱۳۹۴: ۱۲۳).

فراکتال‌ها با توجه به هویت ریاضیاتی، هندسی، الگوریتمی، پیروی از سیستم‌های پویا با دنیای دیجیتال همسو هستند و سهم عمده‌ای را در جهان امروز دارند.

دنیای دیجیتال با فراکتال‌ها ارتباط دارد و فراکتال‌ها با بسیاری از علوم و شاخه‌های مختلف آن. امروز باید به جهان به چشم یک فراکتال بزرگ نگاه کرد. چرا که طی دهه‌های اخیر هندسه فراکتالی در بسیاری از علوم و شاخه‌های هنری راه پیدا کرده‌اند (کوثری. ۱۳۹۴: ۶۹).

فراکتال و دنیای دیجیتال هر دو زبانشان آشناست. فراکتال‌ها از دنیای دیجیتال به راحتی استفاده می‌کنند. اگرچه همانطور که گفته شد به لحاظ بن‌مایه از زمان‌های دور بوده‌اند.

هنرهای سنتی، کلاسیک و هنرهای نرم افزاری، فراکتال آرت

آنچه در هنر فراکتال آرت شاخص است نقش بسیار مهم ریاضیات و محاسبات در خلق تصاویر فراکتالی است. اگر چه این کار بر عهده ی نرم افزارها و برنامه های رایانه ای است. در نتیجه هنرمند از دنیای دیجیتال، نرم افزار و از همه مهمتر کامپیوتر برای خلق اثر خود استفاده می کند. یک تصویر ساده فراکتالی ممکن است در بر دارند ترلیون ها بار محاسبات ریاضیاتی تکرار شونده و ملال آور باشد. کامپیوترها بر خستگی و ملال فایق می آیند و از دستورالعمل های ساده به خوبی پیروی می کنند و از انجام مکرر امور تکرار شونده هیچ گاه خسته نمی شوند (گروسی، ۱۳۷۸:۲۹).

در هنرهای کلاسیک (باستان، رنسانس و بسیاری دیگر از هنرهای کلاسیک ها و هنرهای مختلف) علم محاسبات و اندازه گیری و هندسه نقش مهمی داشته است. به گونه ای که بدون وجود علم ریاضی و هندسه خلق اثر کاملاً بدون مفهوم بوده است. در جاهایی که هنرهای تزئینی نیز وجود دارد. وجود تناسب و محاسبات باز از اصلی ترین مسایل بوده است. هندسه نقوش و نقوش هندسی نیز در زمره ی همین موارد می باشد.

هندسه ی نقوش علمی است که به چگونگی ایجاد نقوش و ترکیب آن ها بر پایه ی قواعد. تناسب هندسی میپردازد (عنبری یزدی، ۱۳۹۴:۲).

هندسه به عنوان یک علم پایه و با اهمیت در بیشتر علوم و هنرها مورد استفاده قرار گرفته است. اما نقوش هندسی نیز از مواردی هستند که از علم هندسه استفاده ی بسیار کرده است.

نقوش هندسی یکی از اصلی ترین شکل فرم های تصویری در هنرهای مذهبی، اسلامی و سنتی می باشد. که به تناسب جایی که باید این نقوش ارائه می شده با مفهوم و شرایط خودش به تصویر کشیده شده است. در رابطه با هنرهایی که به مذهب مربوط می باشند یا هنرهای مذهبی که زیر مجموعه ای از هنرهای سنتی است. علاوه بر خاستگاه فرهنگی بیان می شود که هیچ مذهبی بدون هنر قادر به آفرینش فضایی مناسب برای نمود ها و تجلیت زمینی خویش نخواهد بود (www.Architecture.civilica).

آنچه مهم است علم هندسه است. در گذشته به علم اندازه گیری زمین گفته می شده و امروز به علم اشکال و اندازه ها و تناسب گفته می شود. بی کرانگی، تکرار، تناسب، جزییات، جز به کل،

رنگ، همه در نقوش هندسی، تزئینی، برخی از آثار کلاسیک (نقشمایه های تزئینی) ایده میشود که با فراکتال ها بی ربط و بدون فاصله نیستند.

فراکتال ها همواره دارای چنین کیفیت هایی هستند:

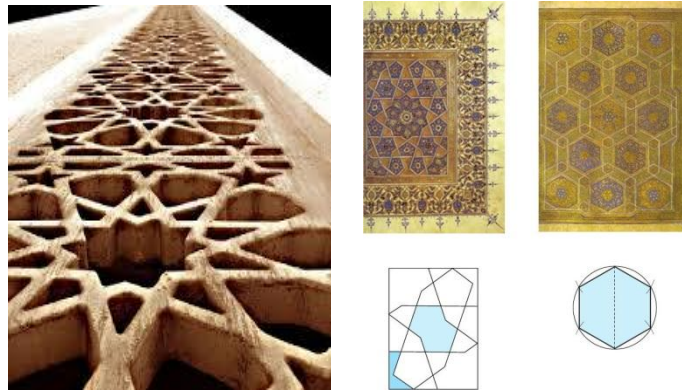
- ۱- در مقیاس های کوچک ساختاری و شگرف و عالی دارد.
- ۲- از جهت توضیح و توصیف در زبان هندسی سنتی اقلیدسی بسیار عالی، بی قاعده و بی رویه است.
- ۳- خود مشابه است و... (گروسی، ۱۳۸۷:۲۴).

اندیشه و تفکر مهمترین نکته در فراکتال ها می باشد. می توان گفت در فراکتال ها نظم وجود دارد اما این نظم می تواند، تکرار شونده نباشد و یا یک نقشمایه با نظم تکرار شود. می تواند کوچک و بزرگ باشند مانند نقوش پارچه و گاه بر نقوش فرش ها و دست بافته ها. نقوش می توانند کوچک و بزرگ ارایه شوند.

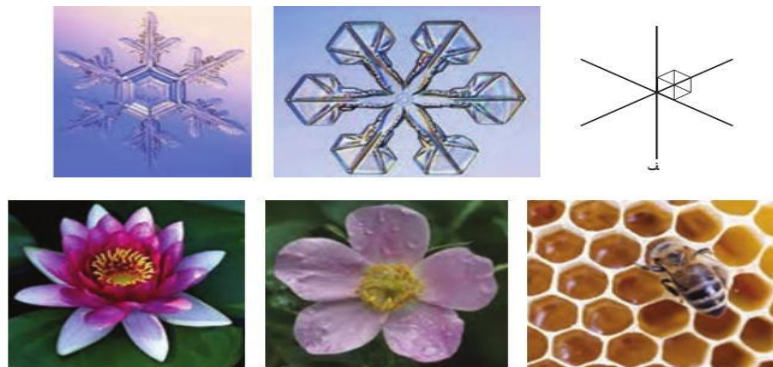
فراکتال ها یا خود همانندند یا خودناهمگرد. در خودهمانند ها شکل جزء، شباهتی مختص شکل کل دارد. این جزء در همه جهات به نسبت ثابتی رشد می کند و کل را بوجود می آورد، اما در خود ناهمگردی شکل جز در همه جهات به نسبت ثابتی رشد نمی کند (www.riazisara.ir).

در نقوش هندسی می توان تکرار و چرخش را دید، نقوش تکرار می شوند تا به مفهومی جدید برسند. در فراکتال ها این شکل گیری بر اساس برخی پردازش ها می تواند به فرم هایی متفاوت برسد، چرا که اندیشه ی بینهایت در این شیوه بسیار جاری است.

نظریه های آشوب و جهش در پردازش تصویر موجب می شود که روند فرم و پردازش تصویر از تکرار به سوی تصادف برود. هنرهای مولد یا زایشی از سال های پیدایش مورد توجه هنرمندان برنامه نویسان قرار گرفت (تقی زادگان، ۱۳۹۴: ۴۱) (تصاویر ۱۰ و ۱۱ و ۱۲).



تصویر ۱۰ و ۱۱- هندسه نقوش و هنر سنتی (هنر اسلامی)



تصویر ۱۲- فراکتال. نظم موجود در طبیعت

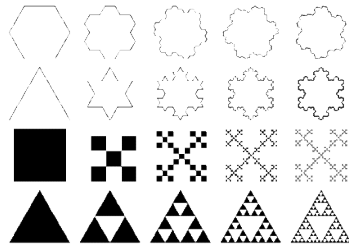
نتیجه گیری

بنوا مندل بروت پدر هندسه فراکتالی در کتاب خود هندسه فراکتالی طبیعت بیان می کند: هندسه ی فراکتالی نشان دهنده ی این حقیقت است که برخی سخت ترین و رسمی ترین بخش های ریاضیات دارای چهره ی پنهان هستند. دنیایی از زیبایی های شکل پذیر که تا امروز پنهان بوده است (Mandelbort. ۱۹۸۳:۱۴۲).

علم ریاضی و هندسه که زیربنای هنر نرم افزاری نیز میباشد زیربنای هندسه ی نقوش و نقوش هندسی و آثار کلاسیک دنیا در عالم هنر است. هنرمندان در هر زمان از علوم رایج دوران خود بهره گرفته اند. علاقه به

ریاضیات به دلیل کاربردهایش همیشه مورد توجه بوده است که این اصل و اساس فراکتال آرت می باشد. بر اساس این نوشتار می توان به موارد زیر پی برد:

- دنیای پست مدرن و تکنولوژی در هنر نرم افزاری مانند هندسه ی تناسب و کلاسیک در هنر های کلاسیک و حتی مذهبی رفتار میکند.
- دنیای آشوب و بیکرانگی و تمام ویژگی های فراکتالی پدیده ای بسیار جدید نیست و از شکل گیری هنر و علم در هر زمان می توان تشابهاتی یافت.
- هندسه، اساس تمامی محاسبات در هنرها می باشد که اساس هنر فراکتال و نرم افزاری هم میباشد.
- فراکتال آرت یک حوزه ی بین رشته ای است. پاسخ مشترک ریاضیات، تکنولوژی و هنر به پیچیدگی انتزاع و تنوع ناشی از تصور پست مدرن تلقی میشود.
- هندسه ی نقوش سنتی، مذهبی در کشورها و فرهنگ های مختلف، از فرایند نظم، هندسه، تکرار، دور زدن، بزرگ و کوچک شدن و رسیدن به فرم های جدید میباشد.
- فراکتال ها زیر مجموعه ای از هنر دیجیتال یا نرم افزاری است و با استفاده از برنامه ها و تکنولوژی شرایط را برای خلق اثر آسان تر کرده است (تصاویر ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶).



تصاویر ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ و ۱۶ - نمونه های مختلفی از فراکتال آرت

منابع

- ۱- آرناسن. ه. تاریخ هنر مدرن. ترجمه: محمد تقی فرامرزی. تهران. نشر نگاه. ۱۳۶۷
- ۲- بکولا، ساندررا. هنر مدرنیسم. روین پاکباز و هلیا دارابی، فرهنگ معاصر، ۱۳۸۷.
- ۳- تقی زادگان، معصومه. تکوین تاریخی هنر رسانه ای جدید. هم اندیشی هنر نرم افزاری. نشر فرهنگستان هنر. تهران. ۱۳۹۴.
- ۴- تقی زادگان، معصومه. محمد رضا مریدی. از هندسه ی تناسبی به هندسه ی تصادفی: زیبایی شناسی انتزاع جدید در هنر نرم افزاری. هم اندیشی هنر نرم افزاری. نشر فرهنگستان هنر. تهران. ۱۳۹۴.
- ۵- حسینی شکیب، فاطمه. رسانه های دیجیتال، تر بازرسانش، ریالیسم مرتبه دوم و رویکردهای جدید به شیوه های قدیمی نگریستن. هم اندیشی هنر نرم افزاری. نشر فرهنگستان هنر. تهران. ۱۳۹۴.
- ۶- لیتون، رابرت. هنر مدرن. ترجمه: علی رامین. نشر نی. تهران. ۱۳۸۳.
- ۷- عنبری یزدی، فایزه. هندسه نقوش. نشر: سازمان چاپ و نشر کتاب های درسی. تهران. ۱۳۹۴.
- ۸- کریبر، گلن. مارتین، روبستن. فرهنگ های دیجیتال درک رسانه های جدید، ترجمه: مرضیه وحدانی. تهران. ساقی. ۱۳۹۰.
- ۹- موثری، مسعود. گروسی، مهرداد. فراکتال آرت و جامعه پست مدرن. هم اندیشی هنر نرم افزاری. نشر فرهنگستان هنر. تهران. ۱۳۹۴.
- ۱۰- گروسی، مهرداد. فراکتال. نشریه آینه ی خیال. تهران. شماره ۹. مرداد و شهریور ۸۷.
- ۱۱- مریدی، محمد رضا. هنر نرم افزاری "مجموعه مقالات". نشر فرهنگستان هنر. تهران. ۱۳۹۴.

۱۲- Devaney, R. Chaos and Fractals: The Mathematics Behind Computer Graphics. Proceedings of symposia in Applied Mathematics, American Mathematical Society. [۱۹۹۸].

۱۳- Falconer, Kenneth. ۲۰۰۳. FRACTAL GEOMETRY: Mathematical Foundations and Applications. Second Edition (John Wiley & Sons Ltd: England).

۱۴- GarusiT Mehrdad .M.MansoorT Saheb. ۲۰۰۹. esthetics in Creating Fractal (PP. ۱۲۷-۱۲۱) (publication of ISAMA: USA).

- ۱۵-Mandelbrot , Benoît; The Fractal Geometry of Nature, W H Freeman & Co,
۱۹۸۲; ISBN ۰-۷۱۶۷-۱۱۸۶-۹.
- ۱۶-[Http://clases.yale.edu/fractals](http://clases.yale.edu/fractals).
- ۱۷-[Http://mathworld.wolfram.com](http://mathworld.wolfram.com)