بررسی رفتارهای دینامیکی و شرایط دوام کیهانی مدل‌های انرژی تاریک در نظریه‌های گرانشی f(T)

ناصر محمدی‌پور[۱]

چکیده

در این کار با در نظر گرفتن گرانش اصلاح یافته‌ی f(T) به عنوان یکی از نامزدهای گرانشی انرژی تاریک که در آن T مقدار عددی پیچش می‌باشد، رفتارهای دینامیکی این مدل‌ها را بررسی کرده و شرایط بقای کیهانی را برای آن‌ها بدست آورده‌ایم. ما نشان می‌دهیم که دو مسیر کیهانی با دوام در فضای فاز برای این دسته از مدل‌های انرژی تاریک وجود دارد: ۱) عالم از یک نقطه‌ی ناپایدار تابشی شروع و با عبور از یک نقطه‌ی زینی ماده وارد دوره‌ی شتاب‌دار دوسیته می‌شود. ۲) عالم از یک نقطه‌ی زینی تابشی وارد یک دوره‌ی پایدار مادی شده و نمی‌تواند وارد دوره‌ی کنونی با غالبیت انرژی تاریک گردد.

کلید واژه ها: شرایط بقای کیهانی، انرژی تاریک، اصلاح گرانش، گرانش f(T)

[۱]. استادیار دانشگاه فرهنگیان، نویسنده مسئول مقاله، naser.kurd@cfu.ac.ir

مقدمه

اخیرا داده‌های کیهانی نشان دهنده‌ی یک دوره‌ی انبساط شتابدار از عالم هستند [۴و۳و۲و۱]. این شتاب توسط عبارتی به نام انرژی تاریک بیان می شود، که برای توصیف آن کاندیداهای زیادی با ویژگی‌های انرژی تاریک در نظرگرفته شده است.

یکی از مناسب ترین کاندیداها، ثابت کیهان شناسی است که البته از دو مشکل تنظیم ظریف و انطباق رنج می برد[۵]. یک میدان دینامیکی اسکالر، با رفتار کوینتسنس یا فانتوم را نیز می توان به عنوان یکی دیگر از کاندیداها نام برد[۶].

رویکرد دیگری که ریشه‌ی گرانشی دارد، اصلاح تئوری نسبیت عام اینشتین است. چرا که این نظریه ممکن است نتواند گرانش را در انرژی‌های خیلی بالا توصیف کند. بنا بر این نظریه‌های اسکالر– تانسوری ارائه شدند که یکی از ساده‌ترین آنها نظریه‌ی برنز – دیکی است[۷].

بین همه‌ی نظریه‌های اصلاح گرانشی، می‌توان نظریه‌ی اصلاحی F(R) را به عنوان یکی از منا سب ترین توصیف ها برای انبساط شتابدار کیهان در نظر گرفت[۹و۸].

در چند سال اخیر، نظریه‌ی گرانشی اصلاح یافته‌ی f(T) که در آن T اسکار پیچش می‌باشد به عنوان نامزدی برای توصیف انبساط شتابدار دوره‌ی کنونی عالم مورد توجه پژوهش‌گران این حوزه قرار گرفته است [۱۳،۱۴].

در ساده‌ترین حالت f(T) = T، که در این حالت نظریه‌ی f(T) به (TERG)[۱] تقلیل یافته که برای اولین بار در سال ۱۹۲۸ توسط اینشتین[۲] ارائه گردید [۱۲]. کارهای متعددی در این حوزه، با معرفی مدل‌هایی جهت توصیف انبساط شتابدار عالم در عصر حاضر صورت گرفته است [۱۸]-[۱۳].

در این کار ما شرایط بقای[۳] (دوام) کیهانی و رفتارهای دینامیکی این دسته از مدل‌های گرانشی توسعه یافته را بررسی خواهیم کرد. مقاله شامل پنج بخش است. در بخش دوم با مرور نظریه، به منظور مطالعه‌ی رفتار دینامیکی این مدل‌ها معادلات میدان را تو سط چهار متغیر بدون دیمانسیون به عنوان یک سیستم خودگردان دوباره نویسی می‌کنیم. تجزیه و تحلیل سیستم معرفی شده در فضای فاز، بدست آوردن نقاط بحرانی و بررسی شرایط پایداری این نقاط را در بخش سوم استخراج می کنیم. در بخش چهارم با ارائه‌ی مدل‌های خاصی و نتایج عددی، رفتار دینامیکی و شرایط دوام آن‌ها را مورد مطالعه قرار خواهیم داد ودر آخر نتیجه گیری و مروری بر کار را در بخش پنج ارائه می دهیم.

۱. Teleparallel Equivalent of General Relativity
۲. Einstein
۳. Viability

مدل‌های انرژی تاریک f(T)

الف) معادلات میدان و تعاریف

کنش را در کلی‌ترین حالت به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$S=\frac{1}{2k^2}\int edx^4(f(T)+L_r+L_m), \qquad (۱)$$

که در آن $2k^2=16\pi G=1$، $e=\sqrt{-g}=\det(e^i_\mu)$، T اسکالر پیچش، L_r و L_m به تر تیب چگالی‌های انرژی تابش و ماده‌ی موجود در عالم می‌باشند. در عالم فریدمان–رابرتسون–واکر تخت میدان وربین[۱] با عناصر متریک به صورت $g_{\mu\nu}=\eta_{ij}e^i_\mu e^j_\nu$ رابطه دارند. با وردش گرفتن از کنش (۱) نسبت به میدان‌های وربین ، معادلات میدان به صورت زیر استخراج می‌شود[۱۴]:

$$S_i^{\mu\nu}\partial_\mu(T)f_{TT}+[e^{-1}\partial_\mu(S_i^{\mu\nu})-e_i^\lambda S_\rho^{\mu\nu}T^\rho_{\mu\nu}]f_T+\frac{1}{4}e_i^\nu f=\frac{1}{2}e_i^\rho T_\rho^\nu \qquad (۲)$$

$T_{\mu\nu}$ تانسور مومنتم–انرژی ماده و $S_i^{\mu\nu}=e_i^\rho S_\rho^{\mu\nu}$. در عالم فریدمان–رابرتسون–واکر تخت مقدار $T=-6H^2$ بدست می‌آید معادلات میدان (۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند[۱۴]

$$\begin{aligned}&12H^2f'+f=(\rho_r+\rho_m),\\&48H^2\dot{H}f''-(12H^2+4\dot{H})f'-f=(P_r+P_m).\end{aligned} \qquad (۳)$$

در عالمی که انرژی تاریک f(T) غالب شده، می‌توان پارامتر معادله حالت را به صورت زیر نوشت:

$$w_{eff}=-1-\frac{2\dot{H}}{3H^2}\frac{2T^2f''+Tf'-T}{2Tf'-f-T} \qquad (۴)$$

در اینجا $f'=\frac{df(T)}{dT}$، $f''=\frac{d^2f(T)}{dT^2}$ و نقطه، نشان‌دهنده‌ی مشتق نسبت به زمان است.

ب)معادلات خودگردان برای انرژی تاریک f(T)

در این بخش با معرفی متغیرهای دینامیکی بدون بعد زیر می‌خواهیم به مطالعه‌ی رفتارهای دینامیکی مدل‌های f(T) به عنوان یک سیستم خودگردان در عمومی‌ترین حالت بپردازیم

---

[۱] Veribein

$$x_1 = \frac{\rho_r}{3H^2}, \quad x_2 = -2f'(T), \quad x_3 = -\frac{f(T)}{6H^2}, \quad x_4 = -\frac{T}{6H^2} = 1. \qquad (۵)$$

با استفاده از متغیرهای تعریف شده می‌توان معادلات (۳) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\Omega_m = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \qquad (۶)$$

با پارامترهای چگالی $\Omega_i = \frac{\rho_i}{3H^2}$ که i نشان‌دهنده‌ی حالت‌های تابش، ماده و انرژی تاریک است. معادلات حرکت را برای سیستم تعریف شده‌ی (۵) به صورت زیر استخراج می‌کنیم

$$\frac{dx_1}{dN} = -2x_1(2 + \frac{\dot{H}}{H^2}), \quad \frac{dx_2}{dN} = 2mx_2\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \frac{dx_3}{dN} = -(x_2 + 2x_3)\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{-3x_2 - 3x_3 + x_1}{(2m+1)x_2}. \qquad (۷)$$

سیستم دینامیکی خودگردان (۷) بدون هیچ پیش فرضی می‌تواند دینامیک مدل‌های f(T) را در عمومی‌ترین حالت توصیف کند. در اینجا $m = \frac{Tf''(T)}{f'(T)}$، $N = Ln(\frac{a}{a_i})$ [۱] می‌باشد. m را به صورت تابعی از r می‌نویسیم $m = m(r)$ که در آن $r = -\frac{Tf'(T)}{f(T)} = \frac{x_2}{2x_3}$. با مشتق‌گیری r نسبت به N، دینامیک r را بررسی کرده به طوری که می‌توان گفت: تحول دینامیکی سیستم روی منحنی $m(r)$ برای هر نقطه که خط $m = -r - 1$ یا $r = 0$ را قطع کند، متوقف می‌شود.

---

[۱] مقدار اولیه‌ی فاکتور مقیاس است a_i.

تجزیه و تحلیل فضای فاز

برای مطالعه‌ی رفتار دینامیکی سیستم ارائه شده در (۷) با قرار دادن $\frac{dx_i}{dN}=0$ ، مجموعه‌ای از نقاط بحرانی را روی سه خط پیوسته با ویژگی‌های آن‌ها بدست می‌آوریم:

$$L_1:(x_1=0,x_2=-x_3,x_3=x_3)$$
$$\Omega_m=0,\Omega_r=0,\Omega_{DE}=1,w_{eff}=-1, \quad (۸)$$

$$L_2:(x_1=0,x_2=-2x_3,x_3=x_3),m=0$$
$$\Omega_m=x_3,\Omega_r=0,\Omega_{DE}=1-x_3,w_{eff}=0, \quad (۹)$$

$$L_3:(x_1=x_3,x_2=-2x_3,x_3=x_3),m=0$$
$$\Omega_m=0,\Omega_r=x_3,\Omega_{DE}=1-x_3,w_{eff}=\frac{1}{3}. \quad (۱۰)$$

با توجه به مقادیر بدست آمده، برای خط بحرانی L_1 مقدار $r=-\frac{1}{2}$ و برای خطوط L_2 و L_3 داریم: $m=0$ و $r=-1$ که در $m=-r-1$ صدق می‌کند که متناظر با یک نقطه‌ی بحرانی $(r=-1,m=0)$ در نمودار (r,m) است که سیستم از آن می‌گذرد. خطوط بحرانی L_2 و L_3 به ترتیب متناظر با جواب‌های مقیاسی[۱] انرژی تاریک با ماده و تابش موجود در عالم هستند. همچنین خط بحرانی L_1 متناظر با نقاط دوسیته $(\dot{H}=0)$ که در این حالت منحنی $m(r)$ از نقطه‌ی بحرانی $(r=-\frac{1}{2},m=-\frac{1}{2})$ در نمودار (r,m) می‌گذرد. ویژه مقادیر ماتریس اختلال را جهت بررسی پایداری این نقاط بدست می‌آوریم.

P_1: نقاط دوسیته $\quad P_1:(x_1=0,x_2=-x_3,x_3=x_3)$

P_1 متناظر با جواب‌های دوسیته به ازاء هر مقدار از x_3 با ویژه مقادیر

$$(-4,-\frac{3}{2}\pm\frac{2}{2m+1}\sqrt{\frac{m(m-1)}{2m+1}+\frac{8m^3+9m^2+3m+\frac{1}{4}}{(2m+1)^2x_3}})$$

و برای مقادیر $x_3\neq 0$، نقاط دوسیته یک رباینده[۲] با ویژه مقادیر $(0,-3,-4)$ هستند.

---

[۱] Scaling solutions
[۲] Attractor

P_2: جواب‌های مقیاسی با ماده

$$P_2:(x_1=0, x_2=-2x_3, x_3=x_3)$$

در این دسته نقاط نسبت پارامترهای انرژی به صورت $(\frac{\Omega_m}{\Omega_{DE}}=\frac{x_3}{1-x_3})$، با ویژه مقادیر

$$0,-1,3(1+\frac{dm}{dr})$$

است که نشان دهنده‌ی وابستگی پایداری این نقاط به مشتق مرتبه اول m نسبت به r می‌باشد. نقطه‌ی $P_{2m}:(0,-2,1)$ متناظر با نقطه‌ی غالبیت ماده در تحول سیستم با $(\Omega_m=1, w_{eff}=0)$ و ویژه مقادیر بالا است که با در نظر گرفتن $x_3=1$ بدست می‌آید.

با توجه به ویژه مقادیر بالا، شرط لازم برای داشتن دوره‌ی ماده‌ی استاندارد در این مدل $(m(r=-1)=0)$ است که P_2 یک نقطه‌ی پایداراست و این P_2 یک نقطه‌ی زینی با شرط $(\left.\frac{dm}{dr}\right|_{r=-1}\succ -1)$ می‌باشد. در غیر این صورت نقطه‌ی P_2 یک نقطه‌ی پایداراست و این بدان معنی است که تحول سیستم در این نقطه متوقف، وسیستم نمی‌تواند وارد دوره‌ی انبساط شتابدار با غالبیت انرژی تاریک شود.

P_3: جواب‌های مقیاسی با ماده

$$P_3:(x_1=x_3, x_2=-2x_3, x_3=x_3)$$

در این نقاط انرژی تاریک تحول دوره تابش را با نسبت $(\frac{\Omega_r}{\Omega_{DE}}=\frac{x_3}{1-x_3})$ تقلید می‌کند به گونه‌ای که در نقطه‌ی $P_{3r}:(1,-2,1)$ غالبیت تابش با $(\Omega_r=1, w_{eff}=\frac{1}{3})$ و ویژه مقادیر

$$0,1,4(1+\frac{dm}{dr})$$

اتفاق می‌افتد. اگر $(\left.\frac{dm}{dr}\right|_{r=-1}\succ -1)$ این نقاط ناپایدار و در غیر این صورت نقاط زینی هستند.

یک مسیر کیهانی بادوام، از یک دوره‌ی تابش شروع و وارد یک دوره‌ی ماده می‌شود که توسط یک دوره‌ی انبساط شتابدار تعیب می‌گردد. درفضای فاز این مسیر از یکی از نقاط P_3 شروع و با عبور از نقطه‌ی P_{3r} (غالبیت تابش) وارد یکی از نقاط P_2 شده و با گذر از نقطه‌ی P_{2m} (غالبیت ماده) توسط یکی از نقاط رباینده‌ی P_1 جذب می‌گردد. در نمودار

(r,m) منحنی باید از نقطه‌ی $(r=-1, m=0)$ بگذرد تا نقاط P_2 و P_3 را داشته باشیم. همچنین شرط داشتن نقاط جاذب دوسیته (P_1) در این نمودار، گذشتن منحنی از نقطه‌ی $(r=-\frac{1}{2}, m=-\frac{1}{2})$ می‌باشد.

بررسی مدل‌های خاص و نتایج عددی

آنچه را که در بخش‌های قبلی در عمومی‌ترین حالت مورد مطالعه قرار دادیم اکنون برای مدل‌های خاص توانی، لگاریتمی و نمایی جستجو می‌کنیم. با رسم نمودار (r,m) در می‌یابیم که در مدل $f(T)=T-\alpha\sqrt{-T}$ ، منحنی (r,m) از دو نقطه‌ی $(-1,0)$ و $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ می‌گذرد. بنابراین، می‌توان گفت مدل فوق می‌تواند یک مسیر کیهانی بقادار را برای ما ارائه دهد که هم دارای دوره‌های تابش و ماده با دوره‌های غالبیت تابش و غالبیت ماده در این اعصار، و هم یک دوره‌ی دوسیته جهت توصیف انبساط شتابدار در دوره‌ی اخیر با $(\Omega_{DE}=1, w_{eff}=-1)$ باشد.

نتیجه گیری

رفتار دینامیکی تئوری‌های گرانشی f(T) به عنوان یک سیستم دینامیکی خودگران مورد بررسی قرار گرفت. در فضای فاز و با تعریف دو متغیر m و r ، مجموعه نقاطی روی سه خط بحرانی بدست آمدند که متناظر با جواب‌های دوسیته، جواب‌های مقیاسی با ماده و جواب‌های مقیاسی با تابش بودند. شرایط پایداری به کمک ویژه مقادیر ماتریس اختلال مورد مطالعه قرار گرفت. جواب‌های دوسیته، جواب‌های جاذب (رباینده) و پایداری نقاط (جواب‌های) دیگر تابع مشتق مرتبه اول m نسبت به r بودند. مشاهده گردید که در رفتار دینامیکی این مدل‌ها در عمومی‌ترین حالت، یک مسیر کیهانی بادوام که با دوره‌ی تابش شروع و پس از عبور از دوره ماده وارد یک دوره‌ی انبساط شتابدار دوسیته گردید. همچنین شرط داشتن هر یک از نقاط در نمودار (r,m) بدست آمد. در نهایت، این شرایط برای تعدادی از مدل‌ها بررسی گردید.

منابع

[١] S. Perlmutter et al. [Supernova Cosmology Project Collaboration], Astrophys. J. ٥١٧, ٥٦٥ (١٩٩٩).
[٢] C. L. Bennett et al., Astrophys. J. Suppl. ١٤٨,١ (٢٠٠٣).
[٣] M. Tegmark et al. [SDSS Collaboration], Phys. Rev. D ٦٩, ١٠٣٥٠١(٢٠٠٤).
[٤] S. W. Allen, et al., Mon. Not. Roy. Astron. Soc. ٣٥٣, ٤٥٧ (٢٠٠٤).
[٥] P. J. Steinhardt, Critical Problems in Physics (١٩٩٧), Princeton University Press.
[٦] Y -F. Cai, E. N. Saridakis, M. R. Setare, J. Q. Xia, Phys. Rep. ٤٩٣, ١, ١-٦٠ (٢٠١٠).
[٧] C. Brans and C. H. Dicke, Phys. Rev. ١٢٤, ٩٢٥ (١٩٦١).
[٨] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. ٤, ١١٥ (٢٠٠٧).
[٩] S. Nojiri and S. D. Odintsov, arXiv:٠٨٠١,٤٨٤٣ [astro-ph]; arXiv:٠٨٠٧,٠٦٨٥ [hep-th]; A. De Felice, S. Tsujikawa, Living Rev. Rel. (٢٠١٠). arXiv:١٠٠٢,٤٩٢٨.;
[١٠] S. Capozziello and M. Francaviglia, Gen. Rel. Grav. ٤٠, ٣٥٧ (٢٠٠٨); M. R. Setare, Int. J. Mod. Phys. D١٧, ٢٢١٩, (٢٠٠٨); Astrophys. Space Sci.٣٢٦, ٢٧, (٢٠١٠)
[١١] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D, ٧٥, ٠٨٣٥٠٤ (٢٠٠٧), arXiv: ٠٦١٢١٨٠ [gr-qc]; S. Y.Zhou, E. J. Copeland and P. M. Saffin, JCAP, ٠٩٠٧, ٠٠٩ (٢٠٠٩), arXiv: ٠٩٠٣,٤٦١٠ [gr-qc].
[١٢] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. ٢١٧ (١٩٢٨); ٢٢٤ (١٩٢٨).
[١٣] R. Ferraro and F. Fiorini, Phys. Rev.D, ٧٥ ٠٨٤٠٣١ (٢٠٠٧).
[١٤] G. R. Bengochea and R. Ferraro, Phys. Rev. D ٧٩, ١٢٤٠١٩ (٢٠٠٩); G. R. Bengochea, Phys. Lett. B, ٦٩٥, ٤٠٥ (٢٠١١).
[١٥] E. V. Linder, Phys. Rev. D, ٨١, ١٢٧٣٠١ (٢٠١٠).
[١٦] P. Wu and H. Yu, Eur.Phys.J. C, ٧١, ١٥٥٢ (٢٠١١), arXiv: ١٠٠٨,٣٦٦٩ [astro-ph.CO].
[١٧] K. Bamba, C. Q. Geng, C. C Lee and L. W. Luo, JCAP ١١٠١, ٠٢١ (٢٠١١), arXiv: ١٠١١,٠٥٠٨ [astro-ph.CO].
[١٨] T. P. Sotiriou, B. Li and J. D. Barrow, Phys. Rev. D, ٨٣, ١٠٤٠٣٠ (٢٠١١), arXiv: ١٠١٢,٤٠٣٩ [gr-qc].