

مدل اصلاح یافته $R+F(G)$ و جوابهای متقارن کروی ایستا

محمدی پور ناصر^۱

چکیده

این کار با اضافه کردن $F(G)$ به کنش اینشتین-هیلبرت، جوابهای متقارن کروی ایستا در خلأ بررسی شده است. با معرفی ضریب نامعین لاگرانژی α ، کنش را بازنویسی کرده و معادلات حرکت را به دست آورده ایم، سپس به ازاء $G = G_0$ جوابها مورد بررسی قرار گرفته که منجر به جواب دوسیتیه با $R_0 = 4\Lambda$ و $G_0 = \frac{8}{3}\Lambda^2$ شده است. برای دسته وسیعی از این مدلها جواب را بدست آورده ایم. سپس کمیت های ترمودینامیکی را روی این جوابها بررسی کردیم. اولین جواب، بدیهی دوسیتیه (شوارتز شیبدا آنتی دوسیتیه) و دیگری یک جواب غیر بدیهی است. **کلید واژه ها:** "گرانش اصلاح یافته"، "گائوس بونت"، "مقارن کروی".

^۱. دانشگاه فرهنگیان، پردیس شهید مقصودی همدان، همدان، نویسنده مسئول، naser.kurd@cfu.ac.ir.

مقدمه

یکی از موضوعات کیهان شناسی نوین، انبساط شتابدار عالم است که داده‌های رصدی گواهی بر این امر هستند [۴ و ۳ و ۲ و ۱]. این شتاب توسط عبارتی به نام انرژی تاریک بیان می‌شود، که برای توصیف آن کاندیداهای زیادی با ویژگی‌های انرژی تاریک در نظر گرفته شده است. یکی از مناسب‌ترین کاندیداهای ثابت کیهان شناسی است که البته از دو مشکل تنظیم ظریف و انطباق رنج می‌برد [۵]. یک میدان دینامیکی اسکالر، با رفتار کوینتسنس یا فانتوم را نیز می‌توان به عنوان یکی دیگر از کاندیداهای نام برد [۶]. رویکرد دیگری که ریشه‌ی گرانشی دارد، اصلاح تئوری نسبیت عام اینشتین است. چرا که این نظریه ممکن است نتواند گرانش را در انرژی‌های خیلی بالا توصیف کند. بنا بر این نظریه‌های اسکالر -

تانسوری ارائه شدند که یکی از ساده‌ترین آنها نظریه‌ی برنز - دیکی است [۷].

بین همه‌ی نظریه‌های اصلاح گرانشی، می‌توان نظریه‌ی اصلاحی $F(R)$ را به عنوان یکی از مناسب‌ترین توصیف‌ها برای انبساط شتابدار کیهان در نظر گرفت [۹ و ۸]. در این نظریه، به کنش استاندارد (کنش هیلبرت - اینشتین) جملاتی از انحنا اضافه می‌گردد که با کاهش انحنا اثر خود نشان می‌دهند و به خوبی می‌توانند انبساط شتابدار اخیر عالم را نشان دهند.

دسته‌ی دیگری از نظریه‌های اصلاحی گرانش، ریشه در نظریه‌ی ریسمان دارند و با اضافه کردن جملاتی مانند جمله‌ی گائوس -

بونت (GB) به کنش استاندارد، آن را اصلاح می‌کنند [۱۰].

نوجیری^۱ و دیگران نشان داده‌اند که می‌توان جواب‌های انرژی تاریک را از یک میدان اسکالر در گائوس - بونت به دست آورد [۱۱]. گرانش $F(G)$ [۱۲] یکی دیگر از نظریه‌های گرانش اصلاح یافته است که می‌تواند نقش انرژی تاریک گرانشی را ایفا کند. در همین راستا، برخی چگالی لاگرانژی را به صورت جمع انحنا (اسکالر ریچی) با GB در نظر گرفته و آن را $F(R, G)$ می‌خوانند [۱۴ و ۱۳].

در این کار ما به بررسی جواب‌های متقارن کروی ایستا مدل‌های $F(R, G)$ می‌پردازیم. از روش انجام شده در مرجع [۱۵] که جهت بررسی جواب‌های متقارن کروی ایستا مدل‌های $F(R)$ استفاده شده، سود می‌بریم. مقاله شامل پنج بخش است. در بخش دوم با مشخص کردن کنش، معادلات میدان را در رویکرد متریک به دست می‌آوریم. جواب‌های متقارن کروی ایستا و معادلات حرکت با استفاده از ضریب نامعین لاگرانژی را در بخش سوم استخراج می‌کنیم. در بخش چهارم جواب معادلات، به ازاء انحنا و ثابت را بررسی می‌کنیم و در آخر نتیجه گیری و مروری بر کار را در بخش پنجم ارائه می‌دهیم.

معادلات میدان و تانسور گرانشی اصلاح شده $F(G)$

کنش را در کلی‌ترین حالت به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(1) \quad s = \int d^4x \sqrt{-g} [R + F(G)] + S_M$$

^۱ Nojiri

که در آن R اسکالر ریچی و F(G) تابعی از عبارت $G = R^2 + R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ می باشد. $R^{\mu\nu}$ و $R^{\mu\nu\rho\sigma}$ به ترتیب تانسورهای ریچی و ریمان می باشند. با وردش گرفتن از کنش (۱) نسبت به متریک، معادلات میدان را به صورت زیر می نویسیم:

$$G_{\mu\nu} = R - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu} + G_{\mu\nu}^{f(G)} \quad (2)$$

$G_{\mu\nu}^{f(G)}$ تانسور اینشتین، $T_{\mu\nu}$ تانسور مومنتم-انرژی ماده و $G_{\mu\nu}^{f(G)}$

تانسور مومنتم-انرژی موثر ناشی از اصلاح هندسه است که:

$$G_{\mu\nu}^{f(G)} = -8 \left[R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} - R_{\rho\sigma}g_{\nu\mu} - R_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - R_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} + \frac{R}{2} (g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \right] \nabla^\rho \nabla^\sigma F_{,G} - (GF_{,G} - F)g_{\mu\nu} \quad (3)$$

$$\text{که } F_{,G} = \frac{dF}{dG} \text{ است.}$$

جوابهای متقارن کروی ایستا در خلاء

متریک متقارن کروی ایستا را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$ds^2 = -B(r)e^{\lambda(r)} dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (4)$$

که در آن $B(r)$ و $\lambda(r)$ توابع نامشخصی از r هستند. شکل انحنا اسکالر و جمله ی گاوس-بونت در این متریک را بازنویسی می کنیم

$$R = \lambda'(r)B'(r) + \lambda''(r)B(r) + B''(r) + \frac{B'(r)}{r} + \frac{B(r)\lambda'(r)}{r} + \frac{B(r)}{r^2} - \frac{2}{r^2} + \lambda'(r)B'(r), \quad (5)$$

$$G = R - \left(B(r) + \frac{B'(r)}{r} \right) \left(\lambda'(r)B'(r) + \frac{B'(r)}{r} - \frac{2}{r^2} \right) - \left(\frac{B'(r)}{r^2} + \frac{B(r)}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \left(\lambda'(r)B'(r) + \frac{B'(r)}{r} - \frac{2}{r^2} \right),$$

(۶). در اینجا مشتقات مرتبه اول و دوم نسبت به r را با $'$ و $''$ نشان داده‌ایم. با معرفی ضریب نامعین لاگرانژی α و استفاده از معادله‌ی (۵)، کنش (۱) را

بازنویسی می‌کنیم

$$S = \int dt \int r^\nu e^{\lambda(r)} dr \left[\frac{R}{\nu} + F(G) - \frac{\alpha}{\nu} [R - B''(r) - \nu B'(r)\lambda'(r) - \nu B(r)\lambda'(r)^\nu - \nu B(r)\lambda''(r) + \frac{\nu}{r^2} - \nu \frac{B'(r)}{r} - \nu \frac{B(r)\lambda'(r)}{r} - \nu \frac{B(r)}{r^2}] \right]. \quad (۷)$$

وردش نسبت به R مقدار $\alpha = 1 + \nu R F_{,G}$ را به ما داده که با قرار دادن در معادله‌ی (۷) و انتگرال گیری جزء به جزء لاگرانژی را به صورت

تابعی از R, G, B, λ و مشتقات مرتبه اول آن‌ها نسبت به r به دست می‌آوریم:

$$L = r^\nu e^{\lambda(r)} \left[\left(\frac{R}{\nu} + F - \nu R^\nu F_{,G} \right) + \nu R F_{,G} \left(\nu \frac{B'(r)}{r} + \nu \frac{B(r)}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} \right) - \nu R^\nu F_{,G} (B'(r) + \nu \lambda'(r) B(r)) - \nu R G'^{F,GG} (B'(r) + \nu \lambda'(r) B(r)) \right]. \quad (۸)$$

اولین معادله‌ی حرکت را با واردش نسبت به λ استخراج می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \nu R r^\nu F_{,G} \left[\frac{B'(r)}{r} + \frac{B(r)}{r^2} - \frac{\nu}{r^2} \right] + (\nu r^\nu F_{,G}) [B'(r) \\ & + \nu \frac{B(r)}{r} + \nu B(r) \frac{F_{,GG}}{F_{,G}} G'] R' + \nu B(r) R'' + \nu r R^\nu F_{,GG} \\ & [(B'(r) + \nu \frac{B(r)}{r}) G' + \nu B(r) \frac{F_{,GGG}}{F_{,GG}} G'^\nu + \\ & \nu B(r) G''] + r^\nu \left(\frac{R}{\nu} + F - \nu R^\nu F_{,G} \right) = 0. \quad (۹) \end{aligned}$$

معادله‌ی (۹) مستقل از λ است. دومین معادله‌ی حرکت را از واردش نسبت به $B(r)$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \nu R r^\nu \lambda'(r) F_{,G} \left[\frac{R'}{R} + \frac{F_{,GG}}{F_{,G}} G' + \frac{\nu}{r^2} \right] - \\ & \nu R r^\nu [F_{,GGG} G'^\nu + F_{,GG} G''] - \nu R'' r^\nu F_{,G} \\ & - \nu r^\nu G' R' F_{,GG} = 0. \quad (۱۰) \end{aligned}$$

بررسی جواب‌ها به ازاء λ و R ثابت

در معادله (۱۰)، وقتی λ و R را ثابت در نظر می‌گیریم به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} G''F_{,GG} + G'F_{,GGG} &= 0, \\ \frac{d^2}{dr^2}F_{,G} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

که می‌توان از آن F را به صورت تابعی از r محاسبه کرد،

$$F_{,G} = ar + b, \quad (12)$$

a و b ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. در تعدادی از مقالات جواب‌های متقارن کروی برای مدل‌های $F(R)$ بررسی شده است [۱۷ و ۱۶ و ۱۵]. سباستیانی^۱ و زربینی^۲ برای مدل‌های $F(R)$ جوابی مشابه معادله (۱۲) به دست آورده‌اند [۱۵]. از آنجا که R و λ ثابت در نظر گرفته شده‌اند لذا می‌توان R را باز نویسی کرد:

$$R = B''(r) + 4\frac{B'(r)}{r} + 2\frac{B(r)}{r^2} - \frac{2}{r^2}. \quad (13)$$

به راحتی می‌توان از معادله (۱۳) به جواب‌های شوارتزشیلد دوستیه و آنتی دوستیه رسید. با گرفتن مشتق از معادله (۹) نسبت به r و در نظر گرفتن R و λ ثابت به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$B''(r)(4ar^2 + 4br) + 4ar^2 B'(r) - (4ar^2 + 4b)B(r) + (4ar + 4b - 4aR)r^2 = 0, \quad (14)$$

در اینجا R مقدار ثابت انحناء است. جواب عمومی معادله (۱۴) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$B(r) = \frac{4b+4ar+aR.r^2}{2(2b+4ar)} + \frac{D_1}{2br+4ar^2} + \frac{D_2.r^2}{2(2b+4ar)}, \quad (15)$$

D_1 و D_2 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. با در نظر گرفتن $a=0$ به جواب بدیهی شوارتزشیلد دوستیه و آنتی دوستیه می‌رسیم

$$B(r) = 1 + \frac{C_1}{r} + C_2.r^2, \quad (16)$$

که در مقایسه با جواب شوارتزشیلد دوستیه و آنتی دوستیه می‌توان C_1 و C_2 را به دست آورد:

$$C_1 = \frac{D_1}{\epsilon b} = -2M, \quad C_2 = \frac{D_2}{\epsilon b} = \frac{A}{3}. \quad (17)$$

جواب معادله ی (۱۴) به ازاء $b=0$ به صورت زیر است:

$$B(r) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R_1}{2} r^2 + C_3 r + \frac{C_4}{r^2} \right), \quad (18)$$

معادله ی (۱۸) یک جواب متقارن کروی ایستا غیر بدیهی در مدل های $F(R,G)$ است که C_3 و C_4 ثابت های انتگرال گیری هستند.

نتیجه گیری

در این کار، معادلات حرکت را برای متریک متقارن کروی ایستا به روش ضریب نامعین لاگرانژی برای گرانش اصلاح یافته ی $F(R,G)$ استخراج کرده ایم. در این رویکرد نشان دادیم که برای دسته ی بزرگی از متریک ها معادلات حرکت به یک معادله تبدیل می شود. در حل این معادله علاوه بر جواب های دقیقی که می شناختیم یک جواب جدید را نیز به دست آورده ایم.

منابع

- [۱] S. Perlmutter et al. [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Astrophys. J.* ۵۱۷, ۵۶۵ (۱۹۹۹).
 [۲] C. L. Bennett et al., *Astrophys. J. Suppl.* ۱۴۸, ۱ (۲۰۰۳).
 [۳] M. Tegmark et al. [SDSS Collaboration], *Phys. Rev. D* ۶۹, ۱۰۳۵۰۱ (۲۰۰۴).
 [۴] S. W. Allen, et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* ۳۵۳, ۴۵۷ (۲۰۰۴).
 [۵] P. J. Steinhardt, *Critical Problems in Physics* (۱۹۹۷), Princeton University Press.
 [۶] T. Padmanabhan, *Phys. Repts.* ۳۸۰, ۲۳۵ (۲۰۰۳); E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* ۱۵, ۱۷۵۳ (۲۰۰۶); Y -F. Cai, E. N. Saridakis, M. R. Setare, J. Q. Xia, *Phys. Rep.* ۴۹۳, ۱, ۱-۶۰ (۲۰۱۰).
 [۷] C. Brans and C. H. Dicke, *Phys. Rev.* ۱۲۴, ۹۲۵ (۱۹۶۱).
 [۸] S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* ۴, ۱۱۵ (۲۰۰۷).
 [۹] S. Nojiri and S. D. Odintsov, arXiv:۰۸۰۱.۴۸۴۳ [astro-ph]; arXiv:۰۸۰۷.۰۶۸۵ [hep-th]; A. De Felice, S. Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* (۲۰۱۰). arXiv:۱۰۰۲.۴۹۲۸.; T. P. Sotiriou and V. Faraoni, arXiv:۰۸۰۵.۱۷۲۶ [gr-qc]; F. S. N. Lobo, arXiv:۰۸۰۷.۱۶۴۰ [gr-qc]; S. Capozziello and M. Francaviglia, *Gen. Rel. Grav.* ۴۰, ۳۵۷ (۲۰۰۸); M. R. Setare, *Int. J. Mod. Phys. D* ۱۷, ۲۲۱۹, (۲۰۰۸); *Astrophys. Space Sci.* ۳۲۶, ۲۷, (۲۰۱۰)
 [۱۰] I. Antoniadis, J. Rizos and K. Tamvakis, *Nucl. Phys. B* ۴۱۵ (۱۹۹۴) ۴۹۷; S. Kawai, M. A. Sakagami and J. Soda, *Phy. Lett. B* ۴۳۷ (۱۹۹۸) ۲۸۴, [arXiv:gr-qc/۹۸۰۲۰۳۳]; S. Kawai and J. Soda, *Phy. Lett. B* ۴۶۰ (۱۹۹۹) ۴۱, [arXiv:gr-qc/۹۹۰۳۰۱۷]; P. Kanti, J. Rizos and K. Tamvakis, *Phys.*

- Rev. D ۵۹ (۱۹۹۹) ۰۸۳۵۱۲; N. E. Mavromatos and J. Rizos, Phys. Rev. D ۶۲ (۲۰۰۰) ۱۲۴۰۰۴; T. Koivisto and D. F. Mota, Phys. Lett. B ۶۴۴ (۲۰۰۷) ۱۰۴, [astro-ph/۰۶۰۶۰۷۸]; T. Koivisto and D. F. Mota, Phys. Rev. D ۷۵ (۲۰۰۷) ۰۲۳۵۱۸, [hep-th/۰۶۰۹۱۵۵]; M. Satoh, S. Kanno and J. Soda, Phys. Rev. D ۷۷ (۲۰۰۸) ۰۲۳۵۲۶, [arXiv: ۰۷۰۶.۳۵۸۵]; M. Satoh and J. Soda, JCAP ۰۸۰۹ (۲۰۰۸) ۰۱۹, [arXiv: ۰۸۰۶.۴۵۹۴].
- [۱۱] S. Nojiri, S. D. Odintsov and M. Sasaki, Phys. Rev. D ۷۱ (۲۰۰۵) ۱۲۳۵۰۹.
- [۱۲] S. Nojiri, and S. D. Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. ۴ (۲۰۰۷) ۱۱۵; G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Zerbini, Phys. Rev. D ۷۳ (۲۰۰۶) ۰۸۴۰۰۷; S. Nojiri, and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B ۶۳۱ (۲۰۰۵) ۱; S. Nojiri, S. D. Odintsov and M. Sami, Phys. Rev. D ۷۴, ۰۴۶۰۰۴ (۲۰۰۶); S. Nojiri and S. D. Odintsov, J. Phys. Conf. Ser. ۶۶, ۰۱۲۰۰۵ (۲۰۰۷); S. Capozziello, E. Elizalde, S. Nojiri and S. D. Odintsov, Phys. Lett. B ۶۷۱, ۱۹۳ (۲۰۰۹); C. G. Bohmer and F. N. Lobo, [arXiv:gr-qc/۰۹۰۲.۲۹۸۲v۳]; K. Nozari, T. Azizi, M. R. Setare, JCAP ۰۹۱۰:۰۲۲, (۲۰۰۹); J. Sadeghi, M. R. Setare, A. Banijamali, Eur. Phys. J. C ۶۴, ۴۳۳, (۲۰۰۹); J. Sadeghi, M. R. Setare, A. Banijamali, Phys. Lett. B ۶۷۹, ۳۰۲, (۲۰۰۹).
- [۱۳] S. M. Carroll, A. De Felice, V. Duvvuri, D. A. Easson, M. Trodden and M. S. Turner, Phys. Rev. D ۷۱, ۰۶۳۵۱۳ (۲۰۰۵).
- [۱۴] G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov and S. Zerbini, Phys. Rev. D ۷۵, ۰۸۶۰۰۲ (۲۰۰۷).
- [۱۵] L. Sebastiani, S. Zerbini, arXiv: ۱۰۱۲.۵۲۳۰v۳ [gr-qc].
- [۱۶] S. Capozziello, A. Stabile and A. Troisi, Class. Quant. Grav. ۲۵, ۰۸۵۰۰۴ (۲۰۰۸). [arXiv: ۰۷۰۹.۰۸۹۱ [gr-qc]]; T. R. P. Carames, E. R. Bezerrade Mello, Eur. Phys. J. C ۶۴, ۱۱۳-۱۲۱ (۲۰۰۹). [arXiv: ۰۹۰۱.۰۸۱۴ [gr-qc]]; T. Multamaki and I. Vilja, Phys. Rev. D ۷۴, ۰۶۴۰۲۲ (۲۰۰۶); Phys. Rev. D ۷۶, ۰۶۴۰۲۱ (۲۰۰۷); R. Sa_ari, S. Rahvar, Phys. Rev. D ۷۷, ۱۰۴۰۲۸ (۲۰۰۸); R. Safari, S. Rahvar, Mod. Phys. Lett. A ۲۴, ۳۰۵-۳۰۹ (۲۰۰۹).
- [۱۷] M. Sharif, H. R. Kausar, arXiv: ۱۱۰۲.۴۱۲۴ [gr-qc].