

پروتکل عمومی برای اندازه‌گیری ناوردای چند جمله‌ای از درجه دو برای حالت خالص N-کیوبیتی اختیاری

ناصر کریمی^۱، مرضیه یحوی^۲

پذیرش: ۱۴۰۱/۶/۲۳

دریافت: ۱۴۰۱/۳/۱۷

چکیده

یکی از روش‌های محاسباتی عمیق و هوشمند برای رده‌بندی کمیت خاص، استفاده از مفهوم یادگیری ماشینی است. در این مقاله، ما حالت‌های کوانتومی N-کیوبیتی زوج را با استفاده از ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ به عنوان معیار درهم‌تنیدگی رده‌بندی می‌کنیم. ابتدا یک پروتکل کلی برای اندازه‌گیری ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ یک حالت خالص N-کیوبیتی زوج دلخواه پیشنهاد می‌کنیم. سپس، براساس تکنیک‌های یادگیری ماشینی، با استفاده از ادغام شبکه عصبی کلاسیک و محاسبات کوانتومی، رده‌بند ناوردای چند جمله‌ای از درجه دوی صفر یا غیر صفر می‌سازیم، حتی اگر الگوی ورودی ناقص باشد. با توجه به برابری معیار درهم‌تنیدگی چند جزئی واقعی و ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ برای حالت X، حالت GHZ را به عنوان حالت خاص X در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که صفر بودن ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ نشان می‌دهد که حالت مورد نظر کاملاً جداپذیر است و متعلق به برجسب کلاس "۰" است، در غیر این صورت حالت درهم‌تنیده می‌شود و متعلق به برجسب کلاس "۱" است.

کلمات کلیدی: "در همتنیدگی"; "چند جمله‌ای"; "یادگیری ماشینی".

^۱. استادیار گروه علوم پایه، دانشگاه فرهنگیان، تهران ایران نویسنده مسئول، n.karimi@cfu.ac.ir

^۲. گروه فیزیک نظری و اختر فیزیک، دانشکده فیزیک دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.

۱. مقدمه

محاسبات کوانتومی با پیشی گرفتن از روش‌های کلاسیک برای مسائل مختلف، در یافتن الگوریتم‌هایی که باعث تسریع در الگوریتم‌های یادگیری ماشین کلاسیک می‌شوند، به موفقیت دست یافته است [۵-۱]. یادگیری ماشینی به عنوان هسته هوش مصنوعی و علم داده [۶] از رشته علوم کامپیوتر آمده است که در آن هدف یادگیری الگوهای بالقوه از مجموعه داده‌های معین اولیه و تصمیم‌گیری یا پیش‌بینی وضعیت ناشناخته آینده براساس این الگوهای آموخته شده است. یادگیری ماشین بسیاری از جنبه‌های جامعه مدرن را قوت می‌بخشد و کاربردهای آن در سراسر علم، فناوری و تجارت فراگیر شده است [۸،۷]. درک جنبه‌های فیزیکی حالت‌های شبکه عصبی مصنوعی در حل مسائل بس-ذره‌ای با تکنیک‌های یادگیری ماشینی معرفی شده است [۹]. این نتایج نشان می‌دهند که یادگیری ماشین می‌تواند یک پلت فرم جدید برای حل برخی از مسائل فیزیک کوانتومی باشد. یادگیری ماشین کوانتومی، که ترکیبی از رشته‌های فیزیک کوانتومی و یادگیری ماشین است، در اواخر دهه ۹۰ و اوایل دهه ۲۰۰۰ به وجود آمد. انتظار می‌رود تحلیل داده‌های کلاسیک با استفاده از رایانه‌های کوانتومی، از طریق استفاده از اثرات مکانیکی کوانتومی مانند همدوسی و درهم‌تنیدگی، امکان شناسایی الگوهای پیچیده‌تر در چنین مجموعه‌های داده‌ای را فراهم کند. استفاده از الگوریتم‌های کوانتومی می‌تواند منجر به بهبود دقت الگوریتم‌های کلاسیک موجود و همچنین عملکرد محاسباتی آن شود. فراتر از کاربردهای گسترده آن در صنعت، یادگیری ماشین برای بررسی مسائل مربوط به فیزیک در سال‌های اخیر به کار گرفته شده است. تا به امروز تعدادی از کاربردهای امیدوارکننده، مانند توموگرافی حالت کوانتومی [۱۰]، مسئله بس-ذره‌ای کوانتومی [۱۱]، یادگیری هامیلتونی [۱۲]، تولید آزمایش‌های کوانتومی خودکار [۱۳]، شناسایی فازها و گذار فاز [۱۴-۱۶] پیشنهاد شده است. شبکه‌های عصبی با موفقیت به عنوان تقریب‌کننده تابع موج متغیر برای مدل‌سازی حالت پایه سیستم‌های کوانتومی بس-ذره‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند. تشخیص درهم‌تنیدگی یا جدایی‌پذیری حالت دویخشی با روش یادگیری ماشینی شروع به مطالعه کرده است [۱۷-۱۹]. یادگیری عمیق کوانتومی، مسئله ایجاد مدار کوانتومی که عملکرد شبکه‌های عصبی را بهبود می‌بخشد، در چندین مقاله مورد بررسی قرار گرفته است [۲۰-۲۲]. یادگیری رقابتی (CL) شکلی از یادگیری بدون نظارت در شبکه‌های عصبی مصنوعی است که در آن نوروها برای پاسخ مناسب به یک الگوی ورودی با یکدیگر رقابت می‌کنند و سپس الگوی ورودی را می‌توان با الگوهای نمونه اولیه مقایسه کرد [۲۳]. این برای رده‌بندی الگوهای ورودی به مجموعه‌ای مجزا از رده‌های خروجی بسیار مفید است. در این مقاله، با استفاده از الگوریتم یادگیری رقابتی، به تشخیص ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ به عنوان معیار درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی N -کیوبیتی زوج تمرکز می‌کنیم. در حالت کوانتومی X ، اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی چند بخشی واقعی برابر با ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ است. بنابراین در این مقاله با استفاده از حالت GHZ، که حالت خاصی از X است، نشان می‌دهیم که صفر بودن ناوردای چند جمله‌ای از درجه ۲ نشان می‌دهد که حالت مورد نظر کاملاً جدایی‌پذیر است و متعلق به کلاس برچسب "۰" است، در غیر این صورت حالت درهم است و متعلق به کلاس "۱" است. سازماندهی این مقاله به شرح زیر است: در بخش اول، مدل مداری ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ را ارائه می‌دهیم. در بخش ۳، الگوریتم طبقه‌بندی کوانتومی پیشنهادی بر اساس یادگیری رقابتی و اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی را توضیح می‌دهیم. در نهایت، مقاله را در بخش آخر به پایان می‌رسانیم.

۲. پروتکل کلی برای اندازه‌گیری ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ برای حالت کوانتومی

N -کیوبیتی خالص

در این بخش، ما پروتکل کلی را برای اندازه‌گیری ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ یک حالت خالص N -کیوبیتی اختیاری ارائه می‌دهیم.

برای این منظور، حالت N -کیوبیتی خالص کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$|\psi_{A_1 A_2 \dots A_N}\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N=0}^1 \psi_{i_1 i_2 \dots i_N} |i_1 i_2 \dots i_N\rangle \quad (1)$$

که به علت بهنجارش، $\sum_{i_1, i_2, \dots, i_N=0}^1 |\psi_{i_1 i_2 \dots i_N}|^2 = 1$. برای هر حالت کوانتومی خالص N -کیوبیتی که N عدد زوجی است، ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C(|\psi_{A_1 \dots A_N}\rangle) = \varepsilon_{i_1 j_1} \varepsilon_{i_2 j_2} \dots \varepsilon_{i_N j_N} \psi_{i_1 i_2 \dots i_N} \psi_{j_1 j_2 \dots j_N}, \quad (2)$$

که جمع روی زیرنویس‌های تکراری است که مقادیر صفر و یک را می‌گیرد، و ε تانسور متناوب ناوردای $SL(2, C)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

حال، ما پروتکلی را نشان می‌دهیم که معادله (۲) را به صورت مکانیک کوانتومی پیاده‌سازی می‌کند، و مدل مداری این پروتکل در شکل ۱ برای حالت چهارکیوبیتی نشان داده شده است. به این منظور، ما دو کپی از حالت خالص N -کیوبیتی زوج معادله (۱) را نیاز داریم. این پروتکل به صورت گام‌های زیر خلاصه می‌شود:

۱. دو کپی از حالت خالص N -کیوبیتی زوج معادله (۱) را آماده می‌کنیم:

$$|\eta_0\rangle \equiv |\psi_{A_1 \dots A_N}\rangle \otimes |\psi_{A_1 \dots A_N}\rangle$$

۲. گیت پائولی σ_y به کیوبیت‌های $2N, 2N+1, \dots, 2N+1$ اعمال می‌شود:

$$|\eta_1\rangle = \sigma_{y_{N+1}} \otimes \sigma_{y_{N+2}} \otimes \dots \otimes \sigma_{y_{2N}} |\eta_0\rangle$$

۳. گیت CNOT بین کیوبیت‌ها به صورت زیر اعمال می‌گردد:

$$|\eta_2\rangle = CNOT_{2, N+2} CNOT_{3, N+3} \dots CNOT_{N, 2N} |\eta_1\rangle$$

۴. در نهایت، گیت دوران R به کیوبیت‌های $2, 3, \dots, N$ اعمال می‌شود:

$$|\eta_3\rangle = R_2 \otimes R_3 \otimes \dots \otimes R_N |\eta_2\rangle$$

که گیت یکانی R حالت کیوبیت را به صورت زیر دوران می‌دهد:

$$R|0\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad R|1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

بنابراین، حالت سیستم به صورت زیر درمی‌آید:

$$C(|\psi_{A_1 \dots A_N}\rangle) = N\sqrt{2P_{0,0}} \quad \text{or} \quad C(|\psi_{A_1 \dots A_N}\rangle) = N\sqrt{2P_{2^{N-1}, 2^{N-1}}}$$

که برای اختصارنویسی، ما شکل باینری را به شکل دهدهی تبدیل کرده‌ایم و P_{00} و $P_{2^{N-1}, 2^{N-1}}$ به ترتیب احتمال موفقیت برای بدست آوردن حالت $|0, 0\rangle$ و $|2^{N-1}, 2^{N-1}\rangle$ در شکل دهدهی هستند.

به طور مشابه برای حالت درهم‌تنیده $|\psi\rangle = \alpha|00\dots 0\rangle + \beta|11\dots 1\rangle$ می‌توان نتایج زیر را بدست آورد:

$$C(|\psi_{A_1 \dots A_N}\rangle) = N\sqrt{2\{P_{0,0}, P_{1,0}, P_{2,0}, \dots, P_{2^{N-1}-1, 0}\}} \\ C(|\psi_{A_1 \dots A_N}\rangle) = N\sqrt{2\{P_{2^{N-1}, 2^{N-1}}, P_{2^{N-1}+1, 2^{N-1}}, \dots, P_{2^N-1, 2^{N-1}}\}} \quad (3)$$

بنابراین، می‌توان ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ را با استفاده از یکی از فرمول‌های نشان‌داده شده در بالا بدست آورد. توجه به این نکته جالب است که برای این مورد که حالت خاصی از حالت X است، درهم‌تنیدگی چندجزئی کلی (GM) با ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ $(2|\alpha\beta|)$ برابر است. بنابراین، برای حالت GHZ به عنوان رده‌بند الگوی ورودی ناقص، حالتی با ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ برابر با صفر، کاملاً جداپذیر است و متعلق به برچسب "۰" است، در غیر اینصورت حالت

درهم تنیده است و متعلق به رده "۱" است. یادآوری می‌شود که اگر در یک سیستم حاوی N کیوبیت، هر کیوبیت با همه کیوبیت‌های دیگر و نه فقط با بعضی از آن‌ها درهم تنیده باشد، می‌گوییم که سیستم دارای درهم تنیدگی چندجزئی کلی (GM) است. یکی از معیارها برای محاسبه درهم تنیدگی GM، استفاده از تابع تلاقی GM است که برای یک حالت خالص $|\phi\rangle$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{GM}(|\psi\rangle) := \min_{\lambda \in K} \sqrt{2} \sqrt{1 - \text{Tr}(\rho_{A_\lambda}^2)}$$

که در معادله فوق، K مجموعه همه دوجزئی‌های ممکن $\{A_\lambda | B_\lambda\}$ را نشان می‌دهد، و ρ_{A_λ} ماتریس چگالی کاهش یافته است: $\rho_{A_\lambda} = \text{Tr}_{B_\lambda}(|\psi\rangle\langle\psi|)$.

۳. الگوریتم رده‌بندی کوانتومی پیشنهادی براساس یادگیری رقابتی و معیار درهم تنیدگی

برای توضیح الگوریتم پیشنهادی با جزئیات بیشتر، ما الگوریتم را روی مجموعه داده‌های زیر توضیح خواهیم داد. فرض کنید مجموعه داده‌هایی داریم که از دو رده با برچسب‌های "۰" و "۱" تشکیل شده‌اند. برچسب "۰" نشان می‌دهد که ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ برابر صفر است و برچسب "۱" نشان می‌دهد که این معیار از درهم تنیدگی غیر صفر است. فرض می‌شود مجموعه‌ای از m الگوی اولیه به صورت زیر وجود دارد:

$$Pt = \{i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, j_1 j_2 j_3 \dots j_{2N} r_2, k_1 k_2 k_3 \dots k_{2N} r_3, \dots, l_1 l_2 l_3 \dots l_{2N} r_m\} \quad (4)$$

که در آن در هر الگو در مجموعه Pt ، مقدار اول ویژگی‌های الگو $(i, j, k, \dots, l = \{0, 1\})$ را نشان می‌دهد، در حالی که مقدار انتهایی برچسب رده را مشخص می‌کند ($r_1, \dots, r_m = \{0, 1\}$). فرض کنید که ما یک الگوی ورودی ناقص داریم که دارای برخی ویژگی‌های گمشده است، برای مثال $inp = ?k_2 ? \dots k_{2N}$ ، علامت "؟" به این معنا است که این الگو در کیوبیت‌های اول و سوم ناقص است. برای ذخیره‌سازی m الگوی اولیه از پیش تعریف شده که با احتمال‌های برابر در لایه ذخیره‌کننده کوانتومی به صورت رابطه (۴) هستند، ما از مدل ذخیره‌سازی Zhou استفاده می‌کنیم.

۴. لایه ذخیره‌کننده کوانتومی با استفاده از مدل ذخیره‌سازی

مدل ذخیره‌سازی Zhou با سه رجیستر نادرهم تنیده به صورت زیر مقداردهی اولیه می‌شود: $|p\rangle$ ، $|qn\rangle$ ، $|c\rangle$. رجیسترهای اول و دوم از n کیوبیت تشکیل می‌شوند، در حالی که رجیستر سوم، رجیستر کنترل کوانتومی نامیده می‌شود که یک سیستم دوکیوبیتی است که با حالت $|01\rangle$ مقداردهی اولیه می‌شود. رجیستر $|p\rangle$ رجیستر ورودی نامیده می‌شود که الگوی اولیه کلاسیکی $p \in Pt$ را در رجیستر کوانتومی $|qn\rangle$ ذخیره می‌کند. "ذخیره‌کننده کوانتومی" به صورت گام‌های زیر خلاصه می‌شود:

گام ۱: مقداردهی اولیه حالت کوانتومی به صورت $| \psi_0 \rangle \Rightarrow | p, qn, c \rangle$

$$| \psi_0 \rangle \Rightarrow i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, \underbrace{000 \dots 0}_{2N+1}, 01\rangle$$

که ما فرض کردیم که حالت ورودی به صورت $i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1$ داده می‌شود، که در آن الگوی اول در معادله (۴) را در نظر گرفته‌ایم.

گام ۲:

$$| \psi_1 \rangle = \prod_{i=1}^{2N+1} T_{p_i c_2 qn_i}^2 | \psi_0 \rangle$$

با توجه به اینکه $c_2 = 1$ ، بنابراین اگر $\{i_m, r_1\} = 0$ باشد، در این صورت $q_m = 0$ است، و اگر $\{i_m, r_1\} = 1$ باشد، آنگاه $q_m = 1$ است، بنابراین ما حالت زیر را داریم:

$$|\psi_1\rangle \Rightarrow i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, 01\rangle$$

که در آن T^2 گیت توفولی است.

گام ۳:

$$|\psi_2\rangle = \prod_{i=1}^{2N+1} NOT_{q_{n_i}} XOR_{p_i q_{n_i}} |\psi_1\rangle \Rightarrow i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{2N+1}, 01\rangle$$

گام ۴:

$$|\psi_3\rangle = T_{q_{n_1} \dots q_{n_{2N+1} c_1}}^{2N+1} |\psi_2\rangle \Rightarrow i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{2N+1}, 11\rangle.$$

گام ۵:

$$|\psi_4\rangle = S_{c_1 c_2}^M |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{2N+1}, 10\rangle + \sqrt{\frac{M-1}{M}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{2N+1}, 11\rangle$$

که در آن S عملگر گیت ونتوره و مارتینز^۱ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{J-1}{J}} & \frac{1}{\sqrt{J}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{J}} & \sqrt{\frac{J-1}{J}} \end{pmatrix}$$

که در این ماتریس، J شاخص الگو در مجموعه الگوهای Pt است.

گام ۶:

$$|\psi_5\rangle = T_{q_{n_1} \dots q_{n_{2N+1} c_1}}^{2N+1} |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{2N+1}, 00\rangle + \sqrt{\frac{M-1}{M}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{2N+1}, 01\rangle$$

گام ۷:

$$|\psi_6\rangle = \prod_{i=1}^{2N+1} XOR_{p_i q_{n_i}} NOT_{q_{n_i}} |\psi_5\rangle$$

با توجه به اینکه همه q_m ها برابر یک هستند، اگر $\{i_m, r_1\} = 0$ ، در این صورت $q_m = 0$ ، و اگر $\{i_m, r_1\} = 1$ ، آنگاه

$q_m = 1$ است، بنابراین ما حالت زیر را داریم:

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, 00\rangle + \sqrt{\frac{M-1}{M}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, 01\rangle$$

گام ۸:

$$|\psi_7\rangle = \prod_{i=1}^{2N+1} T_{p_i c_2 q_{n_i}}^2 |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, 00\rangle + \sqrt{\frac{M-1}{M}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, 01\rangle$$

بنابراین واضح است که الگوی $|i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1\rangle$ در اولین عبارت سیستم کوانتومی $|\psi_7\rangle$ ذخیره می شود. چون مقدار

رجیستر $|c\rangle$ در عبارت دوم سیستم کوانتومی $|\psi_7\rangle$ برابر $|01\rangle$ است، در نتیجه زمانی که الگوریتم ذخیره کننده را مجدداً

تکرار کنیم، الگوی دوم $|Pt\rangle$ در عبارت دوم سیستم کوانتومی $|\psi_7\rangle$ ذخیره می شود. همان رویه برای بقیه الگوهای اولیه

^۱ Venture and Martinez's gate operator

انجام خواهد شد. در نهایت، ما درمی یابیم که هر دو رجیستر $|p\rangle$ و $|c\rangle$ با حافظه رجیستر $|qn\rangle$ جداپذیر هستند. این بدان معناست که خروجی لایه ذخیره کننده کوانتومی با استفاده از مدل ذخیره سازی Zhou، همان رجیستر $|qn\rangle$ است که الگوهای اولیه مجموعه Pt را به صورت برهم نهی یکنواخت به شکل زیر ذخیره می کند:

$$|qn\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} (|i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1\rangle + |j_1 j_2 j_3 \dots j_{2N} r_2\rangle + |k_1 k_2 k_3 \dots k_{2N} r_3\rangle + \dots + |l_1 l_2 l_3 \dots l_{2N} r_M\rangle)$$

۵. دسته بندی یک ورودی با استفاده از الگوریتم پیشنهادی

در اینجا، ما الگوی ناقص $inp = ?k_2 ?k_4 \dots k_{2N}$ را با استفاده از الگوریتم پیشنهادی و براساس گام های زیر دسته بندی می کنیم:

۱. گام مقداردهی اولیه:

$$|\psi_0\rangle \Rightarrow |inp, qn, uv\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} (|?k_2 ?k_4 \dots k_{2N}, i_1 i_2 i_3 \dots i_{2N} r_1, 00\rangle + |?k_2 ?k_4 \dots k_{2N}, j_1 j_2 j_3 \dots j_{2N} r_2, 00\rangle + |?k_2 ?k_4 \dots k_{2N}, k_1 k_2 k_3 \dots k_{2N} r_3, 00\rangle + \dots + |?k_2 ?k_4 \dots k_{2N}, l_1 l_2 l_3 \dots l_{2N} r_M, 00\rangle)$$

$$|\psi_1\rangle = \prod_{i \in h, h \neq \{1,3\}}^{2N} X_{qn_i} CNOT_{inp_i, qn_i} |\psi_0\rangle$$

۲. اگر $inp_i = 0$ باشد، در این صورت qn_i با qn_i گام اول برابر است.

۳. گیت توفولی را بین کیوبیت های $1+?j$ رجیستر $|qn\rangle$ و کیوبیت $|u\rangle$ به ترتیب به عنوان کیوبیت های کنترلی و هدف اعمال کنید.

$$|\psi_2\rangle = T^{j+1} |\psi_1\rangle = T_{(qn_2 qn_4 qn_5 \dots qn_{2N+1} u)} |\psi_1\rangle$$

اگر همه qn_i ها برابر با یک باشند، در این صورت $u=1$ است، در غیر این صورت $u=0$ است.

۴. گام های ۱، ۲ و ۳ را تکرار کنید تا کپی دیگری از حالت را بدست آورید و عملگر M_z را که شامل دو عملگر است اعمال کنید: در ابتدا گیت CNOT روی هر کپی از سیستم های N -کیوبیتی اعمال می شود، طوری که در هر کپی از $|uvw \dots x\rangle$ یک کیوبیت کنترلی است و $|x\rangle, |w\rangle, |v\rangle$ کیوبیت های هدف هستند. سپس، ناوردای چندجمله ای از درجه ۲ که در بخش قبلی توصیف شد، اندازه گیری می شود. در این صورت، دو احتمال در این مرحله وجود دارد:

• **مورد اول:** اگر در گام ۳ حالت $|uvw \dots x\rangle \Rightarrow |00 \dots 0\rangle$ را بدست آوریم، با اعمال M_z درمی یابیم که دسته حالت ۰ است.

• **مورد دوم:** اگر در گام ۳ حالت ۳ حالت

$$|uvw \dots x\rangle = \sqrt{\frac{M-1}{M}} |000 \dots 0\rangle + \frac{1}{\sqrt{M}} |111 \dots 1\rangle$$

درمی یابیم که دسته حالت ۱ است.

۶. مثال

در این بخش، برای روشن شدن مفاهیم، ما حالت خالص چهار کیوبیتی زیر را مورد بررسی قرار می دهیم:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,k,l=0}^1 c_{ijkl} |ijkl\rangle \quad (5)$$

که $\sum_{i,j,k,l=0}^1 |c_{ijkl}|^2 = 1$. برای این سیستم، ناوردای درجه دو عبارت است از:

$$I(|\psi\rangle) = 2| -c_{0111}c_{1000} + c_{0110}c_{1001} + c_{0101}c_{1010} - c_{0100}c_{1011} + c_{0011}c_{1100} - c_{0010}c_{1101} - c_{0001}c_{1110} + c_{0000}c_{1111} | \quad (6)$$

حال ما پروتکلی را نشان می دهیم که رابطه (۶) را به صورت مکانیک کوانتومی پیاده سازی می کند، و مدل مداری این پروتکل در شکل ۱ نشان داده می شود. به این منظور، ما دو کپی از حالت خالص چهار کیوبیتی معین در رابطه (۵) را نیاز داریم:

۱. آماده سازی دو کپی از حالت خالص چهار کیوبیتی

$$|\eta_0\rangle = |\psi\rangle(\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi\rangle)$$

۲. گیت های CNOT به ترتیب بین کیوبیت های دوم و ششم، کیوبیت های سوم و هفتم، کیوبیت های چهارم و هشتم اعمال می شود:

$$|\eta_1\rangle = CNOT_{2,6}CNOT_{3,7}CNOT_{4,8}|\eta_0\rangle$$

۳. در نهایت، دوران های گیت R به کیوبیت های دوم، سوم، و چهارم اعمال می شود:

$$|\eta_2\rangle = R_2R_3R_4|\eta_1\rangle$$

بنابراین حالت سیستم به صورت زیر درمی آید:

$$|\eta_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}((-c_{0111}c_{1000} + c_{0110}c_{1001} + c_{0101}c_{1010} - c_{0100}c_{1011} + c_{0011}c_{1100} - c_{0010}c_{1101} - c_{0001}c_{1110} + c_{0000}c_{1111})|00000000\rangle + (-c_{0111}c_{1000} + c_{0110}c_{1001} + c_{0101}c_{1010} - c_{0100}c_{1011} + c_{0011}c_{1100} - c_{0010}c_{1101} - c_{0001}c_{1110} + c_{0000}c_{1111})|10001000\rangle + \dots) \quad (7)$$

که به علت طولانی بودن عبارت، از نوشتن ادامه عبارت صرف نظر کردیم. با مقایسه دو رابطه (۶) و (۷)، نتیجه زیر را در شکل دودویی بدست می آوریم:

$$I = 4\sqrt{2P_{0,0}} \quad or \quad I = 4\sqrt{2P_{8,8}} \quad (8-الف)$$

که $P_{0,0}$ و $P_{8,8}$ به ترتیب احتمال موفقیت برای بدست آوردن حالت های $|0,0\rangle$ و $|8,8\rangle$ هستند. به طور مشابه، برای حالت درهم تنیده $|\psi\rangle = \alpha|0000\rangle + \beta|1111\rangle$ ما می توانیم نتایج زیر را بدست آوریم:

$$I = 4\sqrt{2\{P_{0,0}, P_{1,0}, P_{2,0}, \dots, P_{7,0}\}} \quad I = 4\sqrt{2\{P_{8,8}, P_{9,8}, P_{10,8}, \dots, P_{15,8}\}} \quad (8-ب)$$

بنابراین ناوردای چند جمله ای از درجه ۲ را می توان با استفاده از فرمول های نشان داده شده در بالا بدست آورد. حال ما الگوریتم رده بندی کوانتومی پیشنهادی را براساس یادگیری رقابیتی و معیار درهم تنیدگی در نظر می گیریم. الگوهای اولیه ای که با رده ۱ برچسب گذاری می شوند، چهار الگو با ۸ ویژگی هستند که عبارتند از: ۰۱۱۰۰۱۱۰، ۰۱۰۱۰۱۰۰، ۰۱۱۱۰۱۰۰ و ۰۱۱۱۰۰۱۰، در حالی که الگوهای اولیه با برچسب ۰ دو الگوی ۰۰۱۰۰۰۱۱۰ و ۱۰۰۰۰۱۱۱ هستند. بنابراین، مجموعه الگوهای اولیه را می توان به صورت زیر نوشت:

$$Pt = \{111001101, 101010001, 001000110, 011101001, 100001110, 011100101\} \quad (9)$$

که در هر الگو در مجموعه Pt، ۸ مقدار اول ویژگی‌های الگو را نشان می‌دهد، در حالی که مقدار آخر برچسب رده را نشان می‌دهد. فرض کنید که الگوی ورودی $inp = ۱?۱?۰۱۱۰$ را داریم که در کیوبیت‌های دوم و چهارم ناقص است. برای ذخیره $M=۶$ الگوی اولیه معادله (۹) از مدل ذخیره‌سازی Zhou که در بخش قبلی توضیح داده شد، استفاده می‌کنیم:

گام ۱: مقداردهی اولیه حالت کوانتومی به صورت $|\psi_0\rangle = |p, qn, c\rangle$ که فرض می‌کنیم حالت ورودی $p=۱۱۱۰۰۱۱۰۱$ الگوی اول در معادله (۹) است:

$$|\psi_0\rangle = |111001101, 000000000, 01\rangle$$

گام ۲:

$$|\psi_1\rangle = \prod_{i=1}^9 T_{p_i c_2 qn_i}^2 |\psi_0\rangle = |111001101, 111001101, 01\rangle$$

گام ۳:

$$|\psi_2\rangle = \prod_{i=1}^9 NOT_{qn_i} XOR_{p_i qn_i} |\psi_1\rangle = |111001101, 111111111, 01\rangle$$

گام ۴:

$$|\psi_3\rangle = T_{qn_1 \dots qn_9 c_1}^9 |\psi_2\rangle = |111001101, 111111111, 11\rangle$$

گام ۵:

$$|\psi_4\rangle = S_{c_1 c_2}^6 |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |111001101, 111111111, 10\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |111001101, 111111111, 11\rangle$$

گام ۶:

$$|\psi_5\rangle = T_{qn_1 \dots qn_9 c_1}^9 |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |111001101, 111111111, 00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |111001101, 111111111, 01\rangle.$$

گام ۷:

$$|\psi_6\rangle = \prod_{n=9}^{i=1} XOR_{p_i qn_i} NOT_{qn_i} |\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |111001101, 111001101, 00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |111001101, 111001101, 01\rangle$$

گام ۸:

$$|\psi_7\rangle = \prod_{i=1}^9 T_{p_i c_2 qn_i}^2 |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |111001101, 111001101, 00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |111001101, 111001101, 01\rangle$$

بنابراین، واضح است که الگوی $|111001101\rangle$ در عبارت اول سیستم کوانتومی $|\psi_7\rangle$ ذخیره می‌شود. با

تکرار همین روند برای بقیه الگوهای اولیه Pt، خروجی لایه ذخیره‌کننده کوانتومی به صورت زیر درمی‌آید:

$$|qn\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|111001101\rangle + |101010001\rangle + |001000110\rangle + |011101001\rangle + |100001110\rangle + |011100101\rangle)$$

در نهایت، ما الگوی ناقص $inp = ۱?۱?۰۱۱۰$ را براساس الگوریتم توصیف شده در بخش قبلی دسته‌بندی

می‌کنیم:

$$|\psi_0\rangle = |inp, qn, uv\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|1?1?0110,111001101,0000\rangle + |1?1?0110,101010001,0000\rangle + |1?1?0110,001000110,0000\rangle + |1?1?0110,011101001,0000\rangle + |1?1?0110,100001110,0000\rangle + |1?1?0110,011100101,0000\rangle)$$

۲.

$$|\psi_1\rangle = \prod_{i \in h=\{1,3,5,6,7,8\}} X_{qn_i} CNOT_{inp, qn_i} |\psi_0\rangle \quad |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|1?1?0110,111011111,0000\rangle + |1?1?0110,101000011,0000\rangle + |1?1?0110,001010100,0000\rangle + |1?1?0110,011111011,0000\rangle + |1?1?0110,00011100,0000\rangle + |1?1?0110,011110111,0000\rangle)$$

۳.

$$|\psi_2\rangle = T_{(\prod_{i \in h=\{1,3,5,6,7,8,9\}u}^{j+1})} |\psi_1\rangle = T_{(qn_1qn_3qn_5qn_6qn_7qn_8qn_9u)} |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|1?1?0110,111011111,0000\rangle + |1?1?0110,101000011,0000\rangle + |1?1?0110,001010100,0000\rangle + |1?1?0110,011111011,0000\rangle + |1?1?0110,100011100,0000\rangle + |1?1?0110,011110111,0000\rangle)$$

بنابراین حالت سیستم چهار کیوبیتی $|uvwx\rangle$ بدست می آید. با تکرار گام های ۱ تا ۳، می توانیم کپی دیگر از حالت

$|uvwx\rangle$ را بدست آوریم. در نهایت، عملگر M_z را که در شکل ۲ نشان داده شده است، روی حالت $|uvwx\rangle \otimes |uvwx\rangle$

اعمال می کنیم. در اینجا بدیهی است که احتمال حالت های

00000000,00010000, 00100000, 00110000, 01000000, 01010000, 01100000, 01110000, 10001000, 10011000, 10101000,10111000, 11001000,11011000, 11101000, 11111000

که به ترتیب متناظر با احتمال های دودویی $\{P_{0,0}, P_{1,0}, P_{2,0}, \dots, P_{8,0}, P_{8,8}, P_{8,9}, \dots, P_{15,8}\}$ است، غیر صفر هستند،

بنابراین مطابق رابطه (۸-ب) مقدار ناوردای چند جمله ای از درجه ۲ غیر صفر است ($I > 0$). بنابراین الگوی آزمایشی $inp =$

۱۱۰۱۱۰ متعلق به برجسب ۱ است.

۷. نتیجه گیری

مسئله دسته بندی حالت های کوانتومی در قلب پردازش اطلاعات کوانتومی نهفته است. برخلاف بسیاری از روش ها برای بررسی این مسئله، هیچ کدام از آن ها کلی نیستند. در این مقاله، ما نشان داده ایم که روش های یادگیری ماشین را می توان به طور موثر برای دسته بندی ناوردای چند جمله ای از درجه ۲ به عنوان یک معیار درهم تنیدگی حالت های کوانتومی N-کیوبیتی با N زوج مورد استفاده قرار داد. در مقایسه با شرط معمول برای تشخیص ناوردای چند جمله ای از درجه ۲، روش ما می تواند یک حالت ناشناخته را می تواند به دو دسته صفر یا یک دسته بندی کند. ما پیش بینی می کنیم که کار ما بینش هایی را برای استفاده از تکنیک های یادگیری ماشین برای حل مسائل بیشتر در زمینه پردازش اطلاعات کوانتومی در آینده نزدیک ارائه دهد.

منابع

- [۱] I. Kerenidis, J. Landman, A. Luongo, and A. Prakash, “*q-means: A quantum algorithm for unsupervised machine learning*,” arXiv preprint arXiv:۱۸۱۲.۰۳۵۸۴, ۲۰۱۸.
- [۲] S. Lloyd, M. Mohseni, and P. Rebentrost, “Quantum algorithms for supervised and unsupervised machine learning,” *arXiv*, vol. ۱۳۰۷.۰۴۱۱, pp. ۱–۱۱, ۷ ۲۰۱۳. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/۱۳۰۷.۰۴۱۱>.
- [۳] S. Lloyd, M. Mohseni, and P. Rebentrost, “Quantum principal component analysis,” *Nature Physics*, vol. ۱۰, no. ۹, p. ۶۳۱, ۲۰۱۴.
- [۴] I. Kerenidis and A. Prakash, “Quantum gradient descent for linear systems and least squares,” *arXiv*:۱۷۰۴.۰۴۹۹۲, ۲۰۱۷.
- [۵] N. Wiebe, A. Kapoor, and K. M. Svore, “Quantum Algorithms for Nearest-Neighbor Methods for Supervised and Unsupervised Learning,” *arXiv*:۱۴۰۱.۲۱۴۲۷۲, ۲۰۱۴. [Online].
- [۶] R. S. Michalski, J. G. Carbonell, and T. M. Mitchell, *Machine Learning: An Artificial Intelligence Approach* (Springer Science and Business Media, Berlin, ۲۰۱۳).
- [۷] M. Jordan and T. Mitchell, *Machine Learning: Trends, Perspectives, and Prospects*, *Science* ۳۴۹, ۲۵۵ (۲۰۱۵).
- [۸] Y. LeCun, Y. Bengio, and G. Hinton, Deep Learning, *Nature* ۵۲۱, ۴۳۶ (۲۰۱۵).
- [۹] G. Carleo and M. Troyer, Solving the Quantum Many-Body Problem with Artificial Neural Networks, *Science* ۳۵۵, ۶۰۲ (۲۰۱۷).
- [۱۰] Giacomo Torlai, Guglielmo Mazzola, Juan Carrasquilla, Matthias Troyer, Roger Melko and Giuseppe Carleo, *Nature Physics*, ۱۴,(۲۰۱۸)۴۴۷.
- [۱۱] Giuseppe Carleo and Matthias Troyer, *Science*, ۳۵۵, (۲۰۱۷)۶۰۲.
- [۱۲] N. Wiebe, C. Granade, C. Ferrie, and D. G. Cory, *Phys. Rev.Lett.* ۱۱۲, ۱۹۰۵۰۱ (۲۰۱۴).
- [۱۳] M. Krenn, M. Malik, R. Fickler, R. Lapkiewicz, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* ۱۱۶, ۰۹۰۴۰۵ (۲۰۱۶).
- [۱۴] S. S. Schoenholz, E. D. Cubuk, D. M. Sussman, E. Kaxiras, and A. J. Liu, *Nat. Phys.* ۱۲, ۴۶۹ (۲۰۱۶).
- [۱۵] E. P. L. van Nieuwenburg, Y.-H. Liu, and S. D. Huber, *Nat. Phys.* ۱۳, ۴۳۵ (۲۰۱۷).
- [۱۶] J. Carrasquilla and R. G. Melko, *Nat. Phys.* ۱۳, ۴۳۱ (۲۰۱۷).
- [۱۷] Y.-C. Ma and M.-H. Yung, *npj Quantum Information* ۴, ۳۴ (۲۰۱۸).
- [۱۸] S. Lu, S. Huang, K. Li, J. Li, J. Chen, D. Lu, Z. Ji, Y. Shen, D. Zhou, and B. Zeng, *Phys. Rev. A* ۹۸, ۰۱۲۳۱۵ (۲۰۱۸).
- [۱۹] J. Gao, L.-F. Qiao, Z.-Q. Jiao, Y.-C. Ma, C.-Q. Hu, R.-J. Ren, A.-L. Yang, H. Tang, M.-H. Yung, , and X.-M. Jin, *Phys. Rev. Lett* ۱۲۰, ۲۴۰۵۰۱ (۲۰۱۸).
- [۲۰] J. Allcock, C.-Y. Hsieh, I. Kerenidis, and S. Zhang, “Quantum algorithms for feedforward neural networks,” *arXiv preprint arXiv*:۱۸۱۲.۰۳۰۸۹, ۲۰۱۸.
- [۲۱] P. Rebentrost, T. R. Bromley, C. Weedbrook, and S. Lloyd, “Quantum hopfield neural network,” *Physical Review A*, vol. ۹۸, no. ۴, p. ۰۴۲۳۰۸, ۲۰۱۸.
- [۲۲] N. Wiebe, A. Kapoor, and K. M. Svore, “Quantum deep learning,” *arXiv preprint arXiv*:۱۴۱۲.۳۴۸۹, ۲۰۱۴.
- [۲۳] R. Rojas. *Unsupervised Learning and Clustering Algorithms*, Neural Networks, Springer Verlag, Berlin, ۱۹۹۶.