

الگوریتم یادگیری رقابتی حالت‌های کوانتومی

ناصر کریمی^۱، مرضیه یحوی^۲، سید محمود عبدالله پوری حسینی^۳، زینب شجیع^۴، معصومه یحوی^۵

پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۲۷

دریافت: ۱۴۰۱/۸/۱۸

چکیده

طبقه بندی درهم تنیدگی حالت‌های کوانتومی با تابع همگن مثبت در ارتباط بوده که تحت عملیات های محلی تصادفی و تبدیل های ارتباط کلاسیکی (SLOCC) ناوردا است. در این مقاله، ابتدا یک طرح کلی برای اندازه گیری تنگل N تایی جهت اندازه گیری درهم تنیدگی یک حالت خالص N کیوبیت فرد -دلخواه ارائه می دهیم. سپس الگوریتم طبقه بندی را توسعه می دهیم که مبتنی بر ادغام بین یادگیری رقابتی و قدرت محاسباتی محاسبات کوانتومی است. با استفاده از این الگوریتم اندازه گیری درهم تنیدگی، ورودی را به یکی از دو گروه دوتایی طبقه بندی می کنیم، حتی اگر الگوی ورودی ناقص باشد.

کلمات کلیدی: الگوریتم رقابتی، حالت‌های کوانتومی، درهم تنیدگی.

^۱ استادیار گروه علوم پایه، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران، نویسنده مسئول n.karimi@cfu.ac.ir

^۲ گروه فیزیک نظری و اخترفیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.

^۳ معاونت درمان دانشگاه علوم پزشکی، تبریز، ایران.

^۴ دبیر فیزیک آموزش و پرورش ناحیه یک، تبریز، ایران.

^۵ دبیر کامپیوتر آموزش و پرورش، مرنده، ایران.

۱ - مقدمه

کمیت درهم تنیدگی و طبقه‌بندی حالت‌های کوانتومی با افزایش ذرات تشکیل‌دهنده حالت‌های کوانتومی، به سرعت پیچیده می‌شود. چالش عمده در علم اطلاعات کوانتومی در مورد پدیده فیزیکی درهم تنیدگی به عنوان یک منبع کلیدی مطرح شد. در طول سال‌های گذشته، ثابت چندجمله‌ای مانند تابع تلافی [۱] برای حالت‌های دو کیوبیتی و تنگله سه تایی برای حالت‌های سه کیوبیتی خالص [۲] تعریف شده است. آنها یکنواهای درهم تنیدگی هستند [۳] به این معنی که توابعی از ضرایب یک حالت کوانتومی چند بخشی بوده که به طور متوسط تحت SLOCC بین طرفین یک سیستم کوانتومی آمیخته افزایش نمی‌یابند. یک ثابت چند جمله‌ای با درجه همگن h برای یک سیستم m کیودیت تابع P بوده که:

$$P(kL | \psi) = k^h P(\psi)$$

که در آن k یک ضریب ثابت بوده و L یک عملگر خطی معکوس متعلق به تغییرات SLOCC است [۴]. تنگله سه تایی یک ثابت چند جمله‌ای درجه ۴ بوده، بنابراین کمترین درجه ثابت چند جمله‌ای برای حالت خالص N -کیوبیت فرد برابر ۴ است. از سوی دیگر، اندازه‌گیری معیارهای درهم تنیدگی در مقالات مختلف براساس نگاشت‌های مثبت [۵]، تداخل دو ذره [۶]، تابع تلافی حالت درهم تنیده دو فوتون [۷] در آزمایشگاه، اندازه‌گیری مستقیم تابع تلافی حالت خالص دو کیوبیتی در کیوبیت‌های ماده، با در دسترس داشتن دو نسخه از حالت کوانتومی و برخی عملیات اجرایی موجود [۸]، پیشنهاد شده است. یکی از راه‌های محاسباتی هوشمند برای حل طیف گسترده‌ای از محاسبات که تحلیل عددی آن دشوار است، استفاده از شبکه‌های عصبی کلاسیکی (CNN) می‌باشد. یادگیری رقابتی یکی از تکنیک‌های یادگیری بدون نظارت در شبکه‌های عصبی مصنوعی بوده که در آن گره‌ها برای پاسخگویی به زیرمجموعه‌ای از داده‌های ورودی با یکدیگر رقابت می‌کنند. این مکانیسم به نورون‌ها اجازه می‌دهد تا جهت واکنش نشان دادن به زیرمجموعه‌ای از ورودی‌ها، به گونه‌ای که تنها یک نورون خروجی، در یک زمان فعال باشد (یعنی «روشن») رقابت کنند. نورونی که در رقابت برنده می‌شود نورون «برنده» نامیده می‌شود [۹]. طبقه‌بندی الگوهای ورودی به مجموعه‌ای مجزا از رده‌های خروجی بسیار مفید. معمولاً فرآیند یادگیری در الگوریتم‌های CNN زمان زیادی می‌برد [۱۰]، در عوض، ویژگی‌های منحصربه‌فرد مکانیک کوانتومی مانند برهم‌نهی کوانتومی و درهم تنیدگی کوانتومی، باعث می‌شود که سیستم‌های کوانتومی داده‌های بیشتری نسبت به سیستم‌های کلاسیکی ذخیره نموده، و محاسبات با استفاده از مکانیک کوانتومی به صورت تصاعدی سریعتر از محاسبات کلاسیکی انجام می‌شوند [۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴]. این امر منجر به ایجاد شاخه‌ای از تحقیقات مبتنی بر ادغام شبکه عصبی کلاسیکی و محاسبات کوانتومی به نام شبکه عصبی کوانتومی گردید. به طور کلی، تعیین این که یک حالت کوانتومی دلخواه در هم تنیده و یا جدایی پذیر بوده دشوار است. در برخی موارد، معیارهای زیادی برای تشخیص و تعیین کمیت درهم تنیدگی پیشنهاد شده است. به عنوان مثال، در سیستم‌های کوانتومی 2×2 یا 3×2 ، تنها معیار لازم و کافی برای جدایی‌پذیری حالت کوانتومی، معیار Peres-Horodecki است (به آن معیار PPT برای ترانهاد جزئی مثبت نیز می‌گویند) [۱۵]، [۱۶]. اما این معیار برای حالت‌های کوانتومی با ابعاد بالاتر اعمال نمی‌شود. در این مقاله، برای اولین بار، روشی برای اندازه‌گیری ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ برای حالت خالص N -کیوبیت فرد دلخواه پیشنهاد می‌کنیم که تنگله سه تایی نمونه‌ای از آن است. در واقع، ما با استفاده از الگوریتم یادگیری رقابتی، بر اقدامات لازم جهت تشخیص ثابت چند جمله‌ای درجه ۴ (درهم تنیدگی فرد- N) به عنوان معیار درهم تنیدگی حالت‌های کوانتومی N کیوبیتی فرد تمرکز می‌کنیم. برای انجام این کار، از حالت گرینبرگر-هورن-زیلینگر^۱ (GHZ) استفاده می‌کنیم که حالت خاصی از X بوده تا بر این اساس رده یک الگوی ورودی ناقص با حالت خالص سه کیوبیت را طبقه‌بندی کنیم. از آنجایی که در حالت X ، اندازه‌گیری درهم تنیدگی چند بخشی خالص برابر با ثابت چند جمله‌ای درجه ۴ است، بنابراین ثابت چند جمله‌ای درجه ۴ صفر نشان می‌دهد که حالت مورد نظر کاملاً جدایی‌پذیر است و متعلق به رده "۰" است، در غیر این صورت حالت درهم تنیده می‌شود و متعلق به رده "۱" است.

^۱ Greenberger-Horne-Zeilinger

این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: بخش ۲ ثابت چند جمله‌ای درجه ۴ را معرفی نموده و یک الگوریتم کلی برای اندازه‌گیری آن پیشنهاد می‌کند. در بخش ۳، ما روش کلی طبقه‌بندی حالت کوانتومی ناقص را نشان می‌دهیم که متعلق به یکی از برجسب‌های رده "۰" مربوط به ثابت چند جمله‌ای درجه ۴ صفر یا برجسب رده "۱" مربوط به ثابت چند جمله‌ای درجه ۴ غیر صفر است. در بخش ۴ مثالی جهت روشن شدن مفاهیم شرح داده شده در بخش‌های قبلی ارائه شده است. در نهایت، بخش ۵ مقاله را به پایان می‌رساند و شامل نتیجه‌گیری مقاله می‌باشد.

۲- تنگن N-تایی فرد

در اینجا ما ثابت چند جمله‌ای درجه ۴ را به عنوان یک معیار درهم‌تنیدگی برای هر حالت کوانتومی N-کیوبیت فرد بررسی می‌کنیم. حالت N کیوبیت خالص کلی بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$|\psi\rangle = \sum_{ijkl\dots m} c_{ijkl\dots m} |ijkl\dots m\rangle \quad (1-2)$$

که در آن، به دلیل بهنجارش، $\sum_{i,j,k,l,\dots,m=0}^1 |c_{ijkl\dots m}|^2 = 1$. برای هر حالت کوانتومی خالص N کیوبیت فرد، ثابت چند جمله‌ای درجه ۴ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau(|\psi\rangle) = \varepsilon_{i_1 i_2} \varepsilon_{j_1 j_2} \varepsilon_{k_1 k_2} \varepsilon_{l_1 l_2} \varepsilon_{i_3 i_4} \varepsilon_{j_3 j_4} \varepsilon_{k_3 k_4} \varepsilon_{l_3 l_4} \dots \varepsilon_{m_1 m_3} \varepsilon_{m_2 m_4} C_{i_1 j_1 k_1 l_1 \dots m_1} C_{i_2 j_2 k_2 l_2 \dots m_2} C_{i_3 j_3 k_3 l_3 \dots m_3} C_{i_4 j_4 k_4 l_4 \dots m_4}, \quad (2-2)$$

که در آن جمع روی شاخص‌های تکراری بوده که مقادیر ۰ و ۱ دارند، و ε تانسور متناوب ثابت-SL(۲,C) است:

$$\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

در ادامه این بخش، پروتکلی را ارائه می‌کنیم که معادله (۲-۲) کوانتومی را بصورت مکانیکی پیاده‌سازی می‌کند. برای این منظور، ما به چهار نسخه از حالت خالص N-کیوبیت فرد که توسط معادله (۲-۱) ارائه شده است، نیاز داریم. این پروتکل بصورت مراحل زیر خلاصه می‌شود:

۱- تهیه چهار نسخه از حالت کوانتومی ارائه شده توسط معادله (۲-۱) به شرح زیر:

$$|\eta_0\rangle = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle$$

۲- گیت پائولی σ_y به کیوبیت‌های زیر اعمال می‌شود:

$$|\eta_1\rangle = \sigma_{y_{N+1}} \otimes \sigma_{y_{N+2}} \otimes \dots \otimes \sigma_{y_{2N-1}} \otimes \sigma_{y_{3N}} \otimes \sigma_{y_{3N+1}} \otimes \sigma_{y_{3N+2}} \otimes \dots \otimes \sigma_{y_{4N}} |\eta_0\rangle$$

۳- گیت CNOT بین کیوبیت‌ها به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$|\eta_2\rangle = CNOT_{2,N+2} \otimes CNOT_{3,N+3} \otimes \dots \otimes CNOT_{N-1,2N-1} \otimes CNOT_{N,3N} \otimes CNOT_{2N,4N} \otimes CNOT_{2N+1,3N+1} \otimes CNOT_{2N+2,3N+2} \otimes \dots \otimes CNOT_{3N-1,4N-1} |\eta_1\rangle$$

که در آن زیرنویس‌ها در گیت $CNOT_{i,j}$ به ترتیب نشان‌دهنده گیت‌های کنترلی و هدف هستند.

۴- در نهایت، گیت R به کیوبیت‌های زیر اعمال می‌شود:

$$|\eta_3\rangle = R_2 \otimes R_3 \otimes \dots \otimes R_N \otimes R_{2N} \otimes R_{2N+1} \otimes R_{2N+2} \otimes \dots \otimes R_{3N-1} |\eta_2\rangle$$

که در آن گیت یکانی R حالت کیوبیت را به صورت زیر می‌چرخاند:

$$R|0\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad R|1\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

در حالت درهم‌تنیده $|\psi\rangle = \alpha|00\dots 0\rangle + \beta|11\dots 1\rangle$ می‌توان نتایج زیر را بدست آورد:

$$\begin{aligned}
\tau(|\psi\rangle) &= (2N-2)^2 \sqrt{2P_{\{0,1,\dots,2^{N-1}-1\}\{0,1\}\{0,2,4,\dots,2^N-2\}\{0\}}}} \\
\tau(|\psi\rangle) &= (2N-2)^2 \sqrt{2P_{\{0,1,\dots,2^{N-1}-1\}\{0,1\}\{1,3,5,\dots,2^N-1\}\{1\}}}} \\
\tau(|\psi\rangle) &= (2N-2)^2 \sqrt{2P_{\{0,1,\dots,2^{N-1}-1\}\{2^N-2,2^N-1\}\{0,2,4,\dots,2^N-2\}\{2^N-2\}}}} \\
\tau(|\psi\rangle) &= (2N-2)^2 \sqrt{2P_{\{2^{N-1},\dots,2^N-1\}\{2^{N-1},2^{N-1}+1\}\{0,2,4,\dots,2^N-2\}\{0\}}}} \\
\tau(|\psi\rangle) &= (2N-2)^2 \sqrt{2P_{\{2^{N-1},\dots,2^N-1\}\{2^{N-1},2^{N-1}+1\}\{1,3,5,\dots,2^N-1\}\{1\}}}} \\
\tau(|\psi\rangle) &= (2N-2)^2 \sqrt{2P_{\{2^{N-1},\dots,2^N-1\}\{2^{N-1}-2,2^{N-1}-1\}\{0,2,4,\dots,2^N-2\}\{2^N-2\}}}}
\end{aligned}
\tag{۳-۲}$$

که در معادلات بالا، شکل دوتایی را جهت اختصارنویسی به شکل دسیمال تبدیل کرده‌ایم و هر یک از معادلات فوق شامل

$$P_{\{0,1,\dots,2^{N-1}-1\}\{0,1\}\{0,2,4,\dots,2^N-2\}\{0\}} \equiv \{P_{0,0,0,0}, P_{1,0,0,0}, \dots, P_{2^{N-1}-1,1,2^N-2}\}$$

احتمال است، برای مثال

بنابراین ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ را می‌توان با استفاده از یکی از فرمول‌های نشان داده شده در معادله (۳-۲) تعیین نمود. جالب است بدانید که برای این مورد که حالت ویژه‌ای از حالت X است، درهم‌تنیدگی چند بخشی خالص^۱ (GM) با مجذور ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ ($2|\alpha\beta|$) برابر است. بنابراین، برای حالت GHZ که از آن برای طبقه‌بندی الگوی ورودی ناقص استفاده می‌کنیم، اگر ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ صفر باشد، حالت کاملاً جداپذیر بوده و متعلق به رده «۰» است، در غیر این صورت حالت درهم‌تنیده بوده و متعلق به رده «۱» خواهد بود. بخاطر داشته باشید که اگر در سیستمی متشکل از N کیوبیت، هریک از کیوبیت‌ها با تمامی کیوبیت‌های دیگر، نه فقط با برخی از آنها، درهم‌تنیده باشد، در این حالت می‌گوییم که سیستم دارای درهم‌تنیدگی چند بخشی خالص (GM) است. یکی از اقدامات برای محاسبه درهم‌تنیدگی GM، شامل تابع تلاقی GM است [۱۷، ۱۸] که برای حالت خالص $|\phi\rangle$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_{GM}(|\psi\rangle) := \min_{\lambda \in K} \sqrt{2} \sqrt{1 - \text{Tr}(\rho_{A_\lambda}^2)} \tag{۴-۲}$$

که K مجموعه‌ای از تمامی دو قسمتی‌های احتمالی $\{A_\lambda | B_\lambda\}$ را نشان می‌دهد، و ρ_{A_λ} ماتریس چگالی کاهش‌یافته است:

$$\rho_{A_\lambda} = \text{Tr}_{B_\lambda}(|\psi\rangle\langle\psi|)$$

۳- الگوریتم طبقه‌بندی کوانتومی براساس یادگیری رقابتی و اندازه‌گیری میزان درهم‌تنیدگی

برای روشن شدن الگوریتم ارائه شده با جزئیات بیشتر، الگوریتم را در مجموعه داده زیر توضیح خواهیم داد. فرض کنید یک مجموعه داده متشکل از دو رده داریم که دارای برچسب "۰" و "۱" هستند. برچسب "۰" نشان می‌دهد که ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ صفر است و برچسب "۱" نشان می‌دهد که ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ غیر صفر است. در [۱۹، ۲۰]، یک مدار کوانتومی برای اندازه‌گیری مستقیم تنگله‌تایی و ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۲ برای حالت‌های کوانتومی با تعداد زوجی از کیوبیت‌ها ارائه شده است. در این مقاله، ما از ناوردای چندجمله‌ای از درجه ۴ برای سیستم‌های حاوی N کیوبیت دلخواه با N فرد و شبکه عصبی رقابتی برای طبقه‌بندی حالت‌های کوانتومی استفاده می‌کنیم. فرض می‌شود که مجموعه‌ای از m الگوی نمونه اولیه به صورت زیر وجود دارد:

$$Pt = \{i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, j_1 j_2 j_3 \dots j_{4N} r_2, k_1 k_2 k_3 \dots k_{4N} r_3, \dots, l_1 l_2 l_3 \dots l_{4N} r_m\} \tag{۵-۳}$$

^۱ Genuine multipartite entanglement

که در هر الگو در مجموعه Pt ، $4N$ مقدار اول، ویژگی‌های الگو را نشان می‌دهد ($i, j, k, \dots, l = \{0, 1\}$)، در حالی که آخرین مقدار نشان‌دهنده برچسب رده است ($r_1, \dots, r_m = \{0, 1\}$). فرض کنید که ما یک الگوی ورودی ناقص داریم که دارای ویژگی‌های گم شده است، به عنوان مثال در $k_2 ? \dots k_{4N} = inp$ ، علامت ؟ یعنی این الگو در کیوبیت اول و سوم ناقص است. برای ذخیره m الگوی نمونه اولیه معین (۳-۵) در لایه ذخیره‌کننده کوانتومی با احتمالات برابر، از مدل ذخیره‌سازی Zhou^۱ استفاده می‌کنیم. این مدل توسط سه رجیستر نادرهم‌تنیده به شرح زیر تهیه شده است: $|p\rangle$ ، $|qn\rangle$ و $|c\rangle$. رجیستر اول و دوم از n کیوبیت تشکیل شده‌اند، در حالی که رجیستر سوم، با نام رجیستر کوانتومی کنترل، یک سیستم دو کیوبیتی است که توسط حالت $|01\rangle$ آماده می‌شود. رجیستر $|p\rangle$ رجیستر ورودی نامیده می‌شود که الگوی نمونه کلاسیکی $p \in Pt$ را در رجیستر کوانتومی $|qn\rangle$ ذخیره می‌کند. بدین ترتیب ذخیره‌سازی کوانتومی را در هشت مرحله زیر خلاصه می‌کنیم [۲۱، ۲۲]:

مرحله ۱: آماده‌سازی حالت کوانتومی به صورت $|\psi_0\rangle = |p, qn, c\rangle$

$$|\psi_0\rangle = |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, \underbrace{000 \dots 0}_{4N+1}, 01\rangle$$

که فرض می‌کنیم حالت ورودی توسط $i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1$ ارائه می‌شود، که در آن الگوی اول در معادله (۳-۵) در نظر گرفته شده است.

مرحله ۲: $|\psi_1\rangle = \prod_{i=1}^{4N+1} T_{p_i c_2 qn_i}^2 |\psi_0\rangle$ با توجه به اینکه $c_2 = 1$ ، بنابراین اگر $\{i_m, r_1\} = 0$ ، آنگاه $q_m = 0$ و اگر

$\{i_m, r_1\} = 1$ باشد، آنگاه $q_m = 1$ است، بنابراین حالت $|\psi_1\rangle = |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, 01\rangle$ را داریم، که در آن T^2 گیت توفولی^۲ است.

$$|\psi_2\rangle = \prod_{i=1}^{4N+1} NOT_{qn_i} XOR_{p_i qn_i} |\psi_1\rangle = |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{4N+1}, 01\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = T_{qn_1 \dots qn_{4N+1} c_1}^{4N+1} |\psi_2\rangle = |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{4N+1}, 11\rangle$$

$$|\psi_4\rangle = S_{c_1 c_2}^J |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{J}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{4N+1}, 10\rangle + \sqrt{\frac{J-1}{J}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{4N+1}, 11\rangle$$

که در آن S یک عملگر گیت Venture و Martinez [۲۱] است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{J-1}{J}} & \frac{1}{\sqrt{J}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{J}} & \sqrt{\frac{J-1}{J}} \end{pmatrix}$$

که در آن J شاخص الگو در مجموعه الگوهای Pt است.

مرحله ۶:

$$|\psi_5\rangle = T_{qn_1 \dots qn_{4N+1} c_1}^{4N+1} |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{J}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{4N+1}, 00\rangle + \sqrt{\frac{J-1}{J}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, \underbrace{111 \dots 1}_{4N+1}, 01\rangle$$

^۱ Zhou's storage model

^۲ Toffli gate

مرحله ۷: $|\psi_6\rangle = \prod_{i=1}^{4N+1} XOR_{p_i q_{n_i}} NOT_{q_{n_i}} |\psi_5\rangle$ با توجه به اینکه تمامی $q_m = 1$ است، بنابراین اگر $\{i_m, r_1\} = 0$

در این حالت $q_m = 0$ و اگر $\{i_m, r_1\} = 1$ ، در این حالت $q_m = 1$ ، بنابراین حالت

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{J}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, 00\rangle + \sqrt{\frac{J-1}{J}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, 01\rangle$$

مرحله ۸:

$$|\psi_7\rangle = \prod_{i=1}^{4N+1} T_{p_i c_2 q_{n_i}}^2 |\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{J}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, 00\rangle + \sqrt{\frac{J-1}{J}} |i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, 000 \dots 0, 01\rangle$$

مشخص است که الگوی $i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1$ در عبارت اول سیستم کوانتومی $|\psi_7\rangle$ ذخیره می‌شود. از آنجایی که، مقدار رجیستر $|c\rangle$ در عبارت دوم سیستم کوانتو $|\psi_7\rangle$ معادل $|01\rangle$ است، در نتیجه وقتی الگوریتم ذخیره کوانتومی دوباره تکرار شود، الگوی دوم $|Pt\rangle$ در عبارت دوم سیستم کوانتومی $|\psi_7\rangle$ ذخیره می‌شود و همین رویه برای الگوهای نمونه اولیه باقی‌مانده انجام خواهد شد. در پایان این مرحله ذخیره‌سازی، هر دو رجیستر $|p\rangle$ و $|c\rangle$ را خواهیم یافت که از حافظه رجیستر $|qn\rangle$ جداپذیر هستند. این بدان معناست که خروجی لایه ذخیره‌سازی کوانتومی با استفاده از مدل ذخیره‌سازی Zhou شامل رجیستر $|qn\rangle$ بوده، که الگوهای نمونه اولیه مجموعه $|Pt\rangle$ را در یک برهم نهی یکنواخت به صورت زیر ذخیره می‌کند:

$$|qn\rangle = \frac{1}{\sqrt{J}} (|i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1\rangle + |j_1 j_2 j_3 \dots j_{4N} r_2\rangle + |k_1 k_2 k_3 \dots k_{4N} r_3\rangle + \dots + |l_1 l_2 l_3 \dots l_{4N} r_m\rangle) \quad (6-3)$$

۳-۱- طبقه بندی یک ورودی با استفاده از الگوریتم پیشنهادی

در اینجا، ما الگوی ناقص $inp = ?k_2 ?k_4 \dots k_{4N}$ را با استفاده از الگوریتم طبق مراحل زیر طبقه‌بندی می‌کنیم:

۱- **مرحله آماده‌سازی:**

$$|\psi_0\rangle \Leftarrow inp, qn, uvwxy$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{J}} (|?k_2 ?k_4 \dots k_{4N}, i_1 i_2 i_3 \dots i_{4N} r_1, \underbrace{000 \dots 0}_N\rangle + |?k_2 ?k_4 \dots k_{4N}, j_1 j_2 j_3 \dots j_{4N} r_2, \underbrace{000 \dots 0}_N\rangle + |?k_2 ?k_4 \dots k_{4N}, k_1 k_2 k_3 \dots k_{4N} r_3, \underbrace{000 \dots 0}_N\rangle + \dots + |?k_2 ?k_4 \dots k_{4N}, l_1 l_2 l_3 \dots l_{4N} r_m, \underbrace{000 \dots 0}_N\rangle)$$

$$|\psi_1\rangle = \prod_{i=1, i \neq \{1,3\}}^{4N} X_{q_{n_i}} CNOT_{inp_i q_{n_i}} |\psi_0\rangle \quad -2$$

اگر $inp_i = 0$ باشد، در این حالت qn_i تغییر یافته و در غیر این صورت qn_i برابر qn_i در مرحله ۱ خواهد بود.

۳- گیت توفولی را بین کیوبیت‌های $j+1$ رجیستر $|qn\rangle$ و کیوبیت $|u\rangle$ را بترتیب بعنوان کیوبیت کنترلی و کیوبیت هدف اعمال نماید.

$$|\psi_2\rangle = T^{j+1} |\psi_1\rangle = T_{(qn_2 qn_4 qn_6 \dots qn_{4N+1} u)} |\psi_1\rangle$$

اگر تمامی qn_i ها معادل ۱ باشند، در این حالت $u = 1$ و در غیر این صورت $u = 0$ خواهد بود.

۴- مراحل ۱، ۲ و ۳ را تکرار کنید تا یک کپی جدا پذیر دیگر از حالت دریافت کنید و عملگر $|Mz\rangle$ را که شامل دو عملیات است را اعمال نمایید: در ابتدا گیت CNOT بر روی هر کپی از سیستم‌های N کیوبیتی به گونه‌ای اعمال می‌شود که در هر کپی از $|uvw \dots x\rangle$ یک کیوبیت کنترل بوده و $|x\rangle, |w\rangle, \dots, |v\rangle$ کیوبیت‌های هدف هستند و سپس ثابت چند جمله‌ای درجه ۴ همانطور که در بخش ۲ توضیح داده شده است، اندازه‌گیری می‌شود. در این مرحله دو احتمال وجود دارد:

مورد ۱: اگر در مرحله ۳ $|uvw \dots x\rangle \Leftarrow 00 \dots 0$ بدست آمد، با اعمال M_z می‌توان دریافت که رده حالت ۰ است.

مورد ۲: اگر در مرحله ۳ $|uvw...x\rangle = \sqrt{\frac{J-1}{J}}|000...0\rangle + \frac{1}{\sqrt{J}}|111...1\rangle$ بدست آمد، با اعمال عملگر M_z ، می‌توان دریافت که رده حالت ۱ است.

۴- مثال

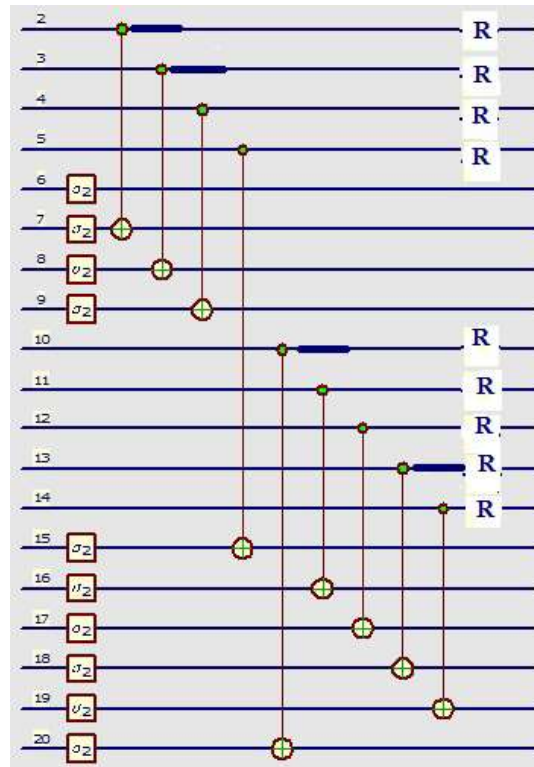
برای روشن شدن بحث فوق، در این بخش به بررسی یک سیستم پنج کیوبیتی می‌پردازیم. حالت پنج کیوبیت خالص زیر را در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,k,l,m=0}^1 a_{ijklm} |ijklm\rangle \quad (۷-۴)$$

به طوری که $\sum_{i,j,k,l,m=0}^1 |a_{ijklm}|^2 = 1$. در این حالت، ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ مطابق با معادله (۲-۲) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau(|\psi\rangle) = \varepsilon_{i_1 i_2} \varepsilon_{j_1 j_2} \varepsilon_{k_1 k_2} \varepsilon_{l_1 l_2} \varepsilon_{i_3 i_4} \varepsilon_{j_3 j_4} \varepsilon_{k_3 k_4} \varepsilon_{l_3 l_4} \varepsilon_{m_1 m_3} \varepsilon_{m_2 m_4} a_{i_1 j_1 k_1 l_1 m_1} a_{i_2 j_2 k_2 l_2 m_2} a_{i_3 j_3 k_3 l_3 m_3} a_{i_4 j_4 k_4 l_4 m_4}, \quad (۸-۴)$$

مراحل ۱ تا ۴ شرح داده شده در بخش ۲ برای اجرای معادله (۴-۷) را می‌توان به صورت مدار کوانتومی زیر نشان داد:



شکل ۱۰. مدل مداری تنگل سه تایی. با تغذیه چهار نسخه از حالت ارائه شده توسط معادله (۴-۷)

خروجی این مدار کوانتومی برای حالت پنج کیوبیتی $|\psi\rangle = \alpha|00000\rangle + \beta|11111\rangle$ در شکل دسیمال در پایه‌های $|00000\rangle = 0, |00001\rangle = 1, \dots, |11111\rangle = 31$ با رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\tau(|\psi\rangle) &= 64\sqrt{2P_{\{0,1,\dots,15\}\{0,1\}\{0,2,4,\dots,30\}\{0\}}} \\
\tau(|\psi\rangle) &= 64\sqrt{2P_{\{0,1,\dots,15\}\{0,1\}\{1,3,5,\dots,31\}\{1\}}} \\
\tau(|\psi\rangle) &= 64\sqrt{2P_{\{0,1,\dots,15\}\{30,31\}\{0,2,4,\dots,30\}\{30\}}} \\
\tau(|\psi\rangle) &= 64\sqrt{2P_{\{16,17,\dots,31\}\{16,17\}\{0,2,4,\dots,30\}\{0\}}} \\
\tau(|\psi\rangle) &= 64\sqrt{2P_{\{16,17,\dots,31\}\{16,17\}\{1,3,5,\dots,31\}\{1\}}} \\
\tau(|\psi\rangle) &= 64\sqrt{2P_{\{16,17,\dots,31\}\{14,15\}\{0,2,4,\dots,30\}\{30\}}}
\end{aligned}$$

(۹-۴)

اکنون، ما از مفاهیم یادگیری رقابتی و اندازه‌گیری درهم‌تیدگی برای طبقه‌بندی حالت خالص پنج کیوبیتی ناشناخته استفاده می‌کنیم. برای این منظور، الگوریتم شرح داده شده در بخش ۳ را اعمال می‌کنیم. ابتدا الگوهای نمونه اولیه داده شده را با استفاده از مدل ذخیره‌سازی Zhou ذخیره نموده و سپس الگوی ناقص را طبقه‌بندی می‌کنیم که آیا متعلق به برجسب رده "۰" مربوط به ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ صفر است یا برجسب رده "۱" مربوط به ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ غیر صفر می‌باشد. ما مجموعه الگوهای نمونه اولیه را بصورت

$$000100011111011100010,01111111111110110001,111101111011110110000$$

در نظر می‌گیریم که در هر الگو، بیست مقدار اول نشان‌دهنده ویژگی‌های الگو بوده، در حالی که آخرین مقدار نشان‌دهنده برجسب رده و الگوی ناقص به صورت $1?1111111111011000$ است. ما مراحل ۱ تا ۸ را که در بخش ۳-۱ بیان شده را دنبال می‌کنیم تا نمونه اولیه فوق را ذخیره کنیم:

مرحله ۱: آماده‌سازی حالت کوانتومی $|\psi_0\rangle \Rightarrow |p, qn, c\rangle$

$$|\psi_0\rangle \Rightarrow 000100011111011100010,00000000000000000000,01\rangle$$

که در آن الگوی اول را در مجموعه الگوهای نمونه اولیه، به عنوان حالت ورودی در نظر می‌گیریم.

مرحله ۲:

$$|\psi_1\rangle = \prod_{i=1}^{21} T_{p_i c_2 q n_i}^2 |\psi_0\rangle$$

$$|\psi_1\rangle \Rightarrow 000100011111011100010,000100011111011100010,01\rangle.$$

مرحله ۳:

$$|\psi_2\rangle = \prod_{i=1}^{21} NOT_{qn_i} XOR_{p_i q n_i} |\psi_1\rangle \Rightarrow 000100011111011100010,11111111111111111111,01\rangle$$

مرحله ۴:

$$|\psi_3\rangle = T_{qn_1 \dots qn_{21} c_1}^{21} |\psi_2\rangle \Rightarrow 000100011111011100010,11111111111111111111,11\rangle.$$

مرحله ۵:

$$\begin{aligned}
|\psi_4\rangle &= S_{c_1 c_2}^3 |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |000100011111011100010,11111111111111111111,10\rangle \\
&+ \sqrt{\frac{2}{3}} |000100011111011100010,11111111111111111111,11\rangle.
\end{aligned}$$

مرحله ۶:

$$|\psi_5\rangle = T_{q_{n_1} \dots q_{n_{21} c_1}}^{21} |\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |000100011111011100010, 111111111111111111, 00\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |000100011111011100010, 111111111111111111, 01\rangle.$$

مرحله ۷:

$$|\psi_6\rangle = \prod_{i=1}^{21} XOR_{p_i q_{n_i}} NOT_{q_{n_i}} |\psi_5\rangle$$

$$|\psi_6\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |000100011111011100010, 000100011111011100010, 00\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |000100011111011100010, 000100011111011100010, 01\rangle.$$

مرحله ۸:

$$|\psi_7\rangle = \prod_{i=1}^{21} T_{p_i c_2 q_{n_i}}^2 |\psi_6\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} |000100011111011100010, 000100011111011100010, 00\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |00000000000000000000, 01\rangle.$$

بنابراین، الگوی $|000100011111011100010\rangle$ در عبارت اول سیستم کوانتومی $|\psi_7\rangle$ ذخیره می‌شود. با انجام همین رویه برای دو الگوی نمونه باقیمانده، خروجی لایه ذخیره‌سازی کوانتومی با استفاده از مدل ذخیره‌سازی Zhou را خواهیم یافت که شامل رجیستر زیر است:

$$|qn\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|000100011111011100010\rangle + |0111111111110110001\rangle + |111101111011110110000\rangle)$$

اکنون، از مراحل ذکر شده در بخش ۳-۱ برای طبقه‌بندی الگوی ناقص $p = ?1?1111111111011000$ استفاده می‌کنیم:

۱- مرحله آماده‌سازی:

$$|\psi_0\rangle = |inp, qn, uvwxy\rangle$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|?1?1111111111011000, 000100011111011100010, 00000\rangle + |?1?1111111111011000, 0111111111110110001, 00000\rangle + |?1?1111111111011000, 111101111011110110000, 00000\rangle)$$

۲-

$$|\psi_1\rangle = \prod_{i=1, i \neq \{1,3\}}^{20} X_{q_{n_i}} CNOT_{inp, q_{n_i}} |\psi_0\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|?1?1111111111011000, 000100011111010101100, 00000\rangle + |?1?1111111111011000, 011111111111111111, 00000\rangle + |?1?1111111111011000, 11110111101111111110, 00000\rangle)$$

۳-

$$|\psi_2\rangle = T_{(qn_2qn_4qn_5\dots qn_{21}u)} |\psi_1\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|1?1111111111011000,00010001111010101100,00000\rangle +$$

$$|1?1111111111011000,01111111111111111,10000\rangle +$$

$$|1?1111111111011000,11110111101111111110,00000\rangle)$$

سپس حالت سیستم پنج کیوبیتی $|uvwxy\rangle$ بدست می آید.

۴- مراحل ۱، ۲، و ۳ را سه بار تکرار می شود تا یک نسخه جداپذیر دیگر از حالت $|uvwxy\rangle$ بدست آید.

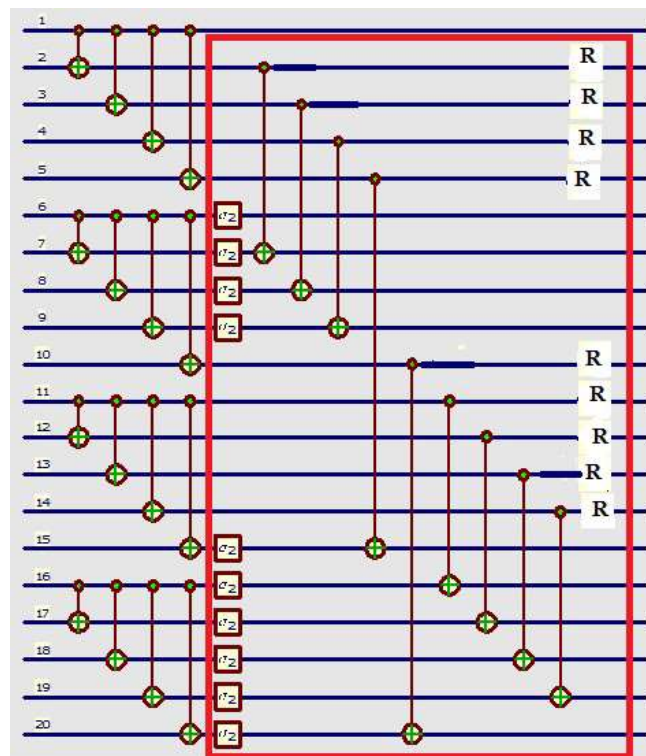
۵- اپراتور M_z روی حالت $|uvwxy\rangle \otimes |uvwxy\rangle \otimes |uvwxy\rangle \otimes |uvwxy\rangle$ اعمال می شود که در آن M_z

یک عملگر یکانی است که گیت CNOT را بین کیوبیت $|u\rangle$ به عنوان گیت کنترل و $|y\rangle, |x\rangle, |w\rangle, |v\rangle$ به عنوان گیت هدف بوده و به دنبال آن از طریق عملگر D ، تنگل پنج تایی اندازه گیری می شود. مدل مداری عملگر M_z در شکل ۲ نشان داده شده است.

می توان نشان داد که احتمال حالت های به دست آمده در معادله (۹-۴) غیر صفر بوده، بنابراین با توجه به این معادله مقدار

تنگل سه تایی غیر صفر است. بنابراین الگوی آزمون $inp = 1?1111111111011000$ به برجسب رده "۱" تعلق

دارد.



شکل ۲. مدل مداری عملگر M_z برای اجرای عملگر D . گیت های مشخص شده در داخل مستطیل قرمز عملگر D را

نشان می دهند که ثابت چند جمله ای درجه ۴ را برای حالت خالص پنج کیوبیتی اندازه گیری می کند.

۵- نتیجه گیری

در ابعاد بالاتر یک سیستم کوانتومی، طبقه بندی و تعیین کمیت درهم تنیدگی آن دشوارتر است. از یک طرف، ثابت های چند جمله ای اهمیت فزاینده ای در توضیح درهم تنیدگی چند بخشی دارند. از سوی دیگر، الگوریتم های یادگیری کوانتومی طیف گسترده ای داشته و دارای کاربردهای متعددی بوده و ارتباط قدرتمندی با پردازش اطلاعات کوانتومی، به ویژه در

طبقه‌بندی حالت‌های کوانتومی دارند. از این رو، در این مقاله ابتدا یک طرح کلی برای اندازه‌گیری ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ یک حالت خالص N کیوبیت فرد دلخواه را پیشنهاد کرده‌ایم. سپس، با استفاده از الگوریتم یادگیری رقابتی کوانتومی و ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ به عنوان معیار تنیدگی حالت خالص N -کیوبیت فرد، رده یک الگوی ورودی ناقص حالت موردنظر را تشخیص می‌دهیم و مشخص می‌شود که آیا به یکی از دو رده (که شامل ثابت چندجمله‌ای درجه ۴ صفر و غیر صفر است) متعلق می‌باشد.

منابع

- [۱] Hill, S. A., & Wootters, W. K. (۱۹۹۷). Entanglement of a pair of quantum bits. *Physical review letters*, 78(۲۶), ۵۰۲۲.
- [۲] Coffman, V., Kundu, J., & Wootters, W. K. (۲۰۰۰). Distributed entanglement. *Physical Review A*, 61(۵), ۰۵۲۳۰۶.
- [۳] Vidal, G. (۲۰۰۰). Entanglement monotones. *Journal of Modern Optics*, 47(۲-۳), ۳۵۵-۳۷۶.
- [۴] Dür, W., Vidal, G., & Cirac, J. I. (۲۰۰۰). Three qubits can be entangled in two inequivalent ways. *Physical Review A*, 62(۶), ۰۶۲۳۱۴.
- [۵] Horodecki, P., & Ekert, A. (۲۰۰۲). Method for direct detection of quantum entanglement. *Physical review letters*, 89(۱۲), ۱۲۷۹۰۲.
- [۶] Cai, J. M., Zhou, Z. W., & Guo, G. C. (۲۰۰۶). Entanglement measurement based on two-particle interference. *Physical Review A*, 73(۲), ۰۲۴۳۰۱.
- [۷] Walborn, S. P., Souto Ribeiro, P. H., Davidovich, L., Mintert, F., & Buchleitner, A. (۲۰۰۶). Experimental determination of entanglement with a single measurement. *Nature*, ۴۴۰(۷۰۸۷), ۱۰۲۲-۱۰۲۴; Van Enk, S. J. (۲۰۰۶). Can measuring entanglement be easy?. *arXiv preprint quant-ph/0606017*; Mintert, F., & Buchleitner, A. (۲۰۰۶). An observable entanglement measure for unknown mixed quantum states. *arXiv preprint quant-ph/0605250*.
- [۸] Romero, G., López, C. E., Lastra, F., Solano, E., & Retamal, J. C. (۲۰۰۷). Direct measurement of concurrence for atomic two-qubit pure states. *Physical Review A*, 75(۳), ۰۳۲۳۰۳.
- [۹] Rojas, R. (۱۹۹۶). Unsupervised learning and clustering algorithms. In *Neural Networks* (pp. ۹۹-۱۲۱). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [۱۰] Hagan, M. T., Demuth, H. B., & Beale, M. (۱۹۹۷). *Neural network design*. PWS Publishing Co.
- [۱۱] Nielsen, M. A., & Chuang, I. (۲۰۰۲). Quantum computation and quantum information.
- [۱۲] Abubakar, M. Y., Jung, L. T., Zakaria, N., Younes, A., & Abdel-Aty, A. H. (۲۰۱۷). Reversible circuit synthesis by genetic programming using dynamic gate libraries. *Quantum Information Processing*, 16(۶), ۱-۲۴.
- [۱۳] Homid, A. H., Abdel-Aty, A., Abdel-Aty, M., Badawi, A., & Obada, A. S. (۲۰۱۵). Efficient realization of quantum search algorithm using quantum annealing processor with dissipation. *JOSA B*, 32(۹), ۲۰۲۵-۲۰۳۳.
- [۱۴] Ahmed, A. H., Cheong, L. Y., Zakaria, N., & Metwally, N. (۲۰۱۳). Dynamics of information coded in a single cooper pair box. *International Journal of Theoretical Physics*, 52(۶), ۱۹۷۹-۱۹۸۸.
- [۱۵] Peres, A. (۱۹۹۶). Separability criterion for density matrices. *Physical Review Letters*, ۷۷(۸), ۱۴۱۳.
- [۱۶] Horodecki, M., Horodecki, P., & Horodecki, R. (۱۹۹۶). Separability of mixed quantum states: necessary and sufficient conditions Phys.
- [۱۷] Qiang, W. C., Sun, G. H., Dong, Q., & Dong, S. H. (۲۰۱۸). Genuine multipartite concurrence for entanglement of Dirac fields in noninertial frames. *Physical Review A*, 98(۲), ۰۲۲۳۲۰.
- [۱۸] Jafarizadeh, M. A., Yahyavi, M., Karimi, N., & Heshmati, A. (۲۰۱۹). Entanglement in four qubit states: Polynomial invariant of degree ۲, genuine multipartite concurrence and one-tangle. *Physics Letters A*, 383(۸), ۷۰۷-۷۱۷.

- [۱۹] Yahyavi, M., Jafarizadeh, M. A., Karimi, N., & Heshmati, A. (۲۰۲۲). Quantum circuit for the direct measurement of the three-tangle of three-qubit states. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2022(۹), ۰۹۳A۰۱.
- [۲۰] Yahyavi, M., Jafarizadeh, M. A., Heshmati, A., & Karimi, N. (۲۰۲۲). Direct measurement of the polynomial invariant of degree ۲. *Chinese Journal of Physics*, 77, ۲۵۸۲-۲۵۸۸.
- [۲۱] da Silva, A. J., Ludermir, T. B., & de Oliveira, W. R. (۲۰۱۶). Quantum perceptron over a field and neural network architecture selection in a quantum computer. *Neural Networks*, 76, ۵۵-۶۴.
- [۲۲] Zidan, M., Sagheer, A., & Metwally, N. (۲۰۱۵, July). An autonomous competitive learning algorithm using quantum hamming neural networks. In *2015 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)* (pp. ۱-۷). IEEE.