دانشگاه فرهنگیان *Farhangian University*
فصلنامه پویش در آموزش علوم پایه *Quarterly Journal of Education in Basic Sciences*
دوره دهم، شماره ۳۵، تابستان ۱۴۰۳ *Volume 10, Issue 35, Summer, 2024*

ارزیابی میزان سطوح تفکر جبری دانش‌آموزان پایه دهم هنرستان‌های فنی وحرفه‌ای

ملوک حبیبی[۱]، سید مهدی طاعت[۲]،وحید عالمیان[۳]

دریافت:۱۴۰۲/۱۰/۲ پذیرش:۱۴۰۳/۴/۶

چکیده

هدف از پژوهش حاضر ارزیابی میزان سطوح تفکر جبری دانش‌آموزان پایه دهم بر اساس چارچوب ارائه شده توسط کاپوت و پانتزی در چهار سطح (الف) تعمیم محاسبات، (ب) تفکر تابعی، (ج) زبان مدلسازی و (د) اثبات جبری می‌باشد. تفکر جبری، توانایی استفاده از ساختارها و روابط انتزاعی ریاضی برای تعمیم، بازنمایی، توجیه و استدلال است، این نوع تفکر به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا ارتباطات عمیقی بین مفاهیم و مؤلفه‌های ریاضی را برقرارکنند. جامعه آماری پژوهش دانش‌آموزان پایه دهم هنرستانهای فنی وحرفه‌ای شهرتهران ونمونه آماری، نمونه دردسترس به تعداد ۶۲ نفر(۳۱ نفردختر و۳۱ نفر پسر)که درسال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱ تحصیل می-کردند، انتخاب شد. روش پژوهش از جهت هدف توصیفی- پیمایشی است. آزمون محقق‌ساخته با روایی و پایایی تأیید شده گرفته شد و نتایج پژوهش با به روش آمارتوصیفی و استنباطی تجزیه وتحلیل شد. نتایج حاصل از این پژوهش نشان داد که در هر چهار سطح تفکر جبری، دانش‌آموزان عملکرد ضعیفی از خود ارائه کردند. میانگین کل نمرات کسب شده توسط دانش‌آموزان در سطح تعمیم محاسبات ۳۵/۵٪، تفکر تابعی ۳۶/۵٪، مدلسازی ۱۴/۹٪ و در سطح اثبات جبری ۴٪ و نتایج آزمون تی مستقل تأیید کرد که سطوح تفکر جبری دانش‌آموزان دختر و پسر دارای تفاوت معنا داری نمی‌باشد و سطوح تفکر جبری دختران برابر با پسران می باشد.

واژگان کلیدی: سطوح تفکر جبری، تعمیم محاسبات، تفکر تابعی، مدلسازی ، اثبات جبری، پایه دهم

۱. گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی۸۸۹-۱۴۶۶۵، تهران، ایران. نویسنده مسؤول Moloukhabibi@yahoo.com
۲.کارشناسی ارشد آموزش ریاضی.
۳. گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی۸۸۹-۱۴۶۶۵، تهران، ایران.

مقدمه

ریاضیات شامل مجموعه‌ای از واقعیت‌ها و روش‌هایی است که با هم در ارتباط هستند. با شناسایی و استفاده از الگوها، می‌توان پیش‌بینی کرد که چه چیزهایی درآینده رخ خواهد داد وبا بحث در مورد رابطه‌ها والگوهای مختلف ریاضی می‌توان ارتباط بین مفاهیم ریاضی ودنیای اطراف را دید. (کاپلی[۱] ،۲۰۰۰) جبر از واژه عربی "الجبر" گرفته شده است که به معنای "شکستن" است. جبر برای حل معادلات که شامل شکستن معادله به قسمت‌های کوچکتر وساده‌تر است، بکاربرده می‌شد (ریچارد جی[۲] ،۱۹۷۷) .یونانیان باستان در سده‌های پنجم تا سوم قبل از میلاد، پایه‌های جبر را به عنوان یک شاخه مستقل از ریاضیات بنا نهادند. با این حال، این پایه‌ها هنوز ناقص وخام بودند و از بسیاری از مفاهیم و تکنیک‌های جبر امروزی برخوردار نبودند. این جبر بیشتر به صورت هندسی بیان می‌شد تا به صورت نمادین امروزی (بویر[۳]، ۲۰۱۱) .

یکی از بخش‌های اصلی ریاضیات جبر است که به بررسی وکاربرد ساختارها، الگوها، روابط و عملگرها می‌پردازد. با استفاده از جبر دانش‌آموزان می‌توانند، مهارتهای محاسباتی، حل مسائل، تعمیم‌پذیری و استدلال منطقی را بهبود بخشند (چارلز[۴]، ۲۰۱۷) . در واقع جبر فقط یک زبان نیست، بلکه بخشی از قدرت آن ناشی از استفاده از نمادهایی است که امکان بیان ایده‌های ریاضی را به روشی کوتاه و دقیق فراهم می‌کند. (سفارد و ولینچفسکی[۵] ، ۱۹۹۴) جبر را می‌توان به عنوان دروازه‌ای برای تفکر انتزاعی در نظر گرفت (اکان،با-کی، چاکیر اوغلو[۶] ،۲۰۱۱) .

تفکردر معنای عمومی آن، فرآیندی است که افراد با بهره‌گیری از اطلاعات، تجربیات و مهارت‌های خود، مسائل و موضوعات مختلف را مورد تحلیل، انتقاد، اندیشیدن و ارزیابی قرار می‌دهند (فاسین[۷] ،۲۰۱۳) . تفکر می‌تواند شامل انواع تفکر انتقادی، تفکرخلاق، تفکرتحلیلی و تفکرانتزاعی باشد. تفکر ریاضی به عنوان یکی از ابعاد تفکر تحلیلی، معمولاً به حل مسائل پیچیده، استفاده از اصول و قوانین ریاضی، انجام محاسبات و استنباط منطقی در ارتباط با مسائل ریاضی می‌پردازد و تفکر جبری به نوعی تفکر ریاضی اطلاق می‌شود که درآن از حروف و سایر علائم به جای اعداد استفاده می‌شود و عملیات ریاضی مانند جمع، ضرب، تقسیم و استخراج معادلات با استفاده از این حروف انجام می‌شود. این نوع تفکر برای مدل‌سازی و حل مسائل پیچیده در ریاضیات، بسیار مفید است (کی یرن[۸]، ۲۰۱۶) .

کاپوت[۹] (۲۰۰۸) بیان می‌کند که تفکر جبری به توانایی فکری اشاره دارد که به کمک آنها فرد قادر است الگوها، روابط و قوانین ریاضیاتی را شناسایی، تعمیم دهد ودر تفکر ریاضی پیشرفت کند. تفکر جبری شامل تشخیص الگوها، تعمیم‌ها، نمایش روابط و تجزیه و تحلیل ساختارها است. انجمن ملی معلمان ریاضی آمریکا [۱۰](۲۰۰۰) تفکر جبری بعنوان یک فرآیند پیچیده ذکر می‌کندکه شامل مراحل مختلفی است. این مراحل عبارتند از: ۱-شناسایی و بیان روابط و الگوها ۲-استفاده از نمادها برای نشان دادن روابط و الگوها ۳-حل مسائل با استفاده از نمادها ۴-تعمیم روابط و الگوها به سایر موقعیت‌ها وتفکر جبری را یک مهارت کلیدی می‌داند که برای موفقیت در ریاضی و سایر زمینه‌ها ضروری است وتأکید می‌کند که به جبر باید به عنوان یک روش نگریست نه به عنوان یک موضوع گسسته. به عبارت دیگر، جبر را به عنوان یک رویکرد تفکری (تفکر جبری) برای حل مسائل ریاضی و نه فقط به عنوان یک مبحث از دروس ریاضی در مدارس می‌داند.

---

۱. Copley
۲. Richard J
۳. Boyer
۴. Charles
۵. Sfard & Linchevski
۶. Akkan ،Baki و Çakıroğlu
۷. Facione, P. A
۸. Kieran
۹. kaput
۱۰. National council of mathematical of teacher(NCTM)

جبر وتفکر جبری

الکاک و سیمپسون[۱](۲۰۱۹) عنوان می‌کنند که جبر به بررسی ساختارها، عملیات و قواعد ریاضی می‌پردازد ویک شاخه از ریاضیات است که بر روی مجموعه‌ها، عملگرها و قواعد عملیاتی تمرکز دارد و از نمادها و علائم ریاضی برای مدل‌سازی و حل معادلات و روابط ریاضی استفاده می‌شود. اما تفکر جبری روشی است که با استفاده از آن الگوها و روابط ریاضی را تشخیص داده و با استفاده از آنها به حل مسائل پرداخته می‌شود. تفکر جبری اغلب با استفاده از نمادها برای نشان دادن روابط و الگوها بکار می‌رود، اما لزوماً اینطور نیست. (استیسی[۲]، ۱۹۹۹) به عنوان نمونه، می‌توان رابطه بین وزن و قد را به صورت کلامی بیان کرد، بدون اینکه از نمادهای جبری استفاده کند. این یک نمونه از تفکر جبری بدون بکار بردن جبر می‌باشد؛ بعبارت دیگر تفاوت اصلی بین جبر وتفکر جبری عبارت است از اینکه جبر بعنوان یک رشته خاص از ریاضیات است، در حالی که تفکر جبری یک فرآیند فکری است که می‌توان از آن در زمینه‌های مختلف ریاضی استفاده کرد. تفکر جبری شامل تحلیل و تفسیر روابط میان متغیرها و نمادها، استنباط منطقی بر اساس اصول جبری و تجزیه و تحلیل مسائل پیچیده با استفاده از روش‌های جبری است (استرانبرگ[۳]، ۲۰۱۰) .

استیسی (۱۹۷۷) تفاوت میان جبر و تفکر جبری را به وضوح تبیین کرده است؛ جبر به مجموعه‌ای از قواعد و قوانین ریاضیاتی اشاره داردکه به کمک آنها می‌توان معادلات و مسائل ریاضی را حل کرد. تفکر جبری به توانایی فرد در ارتباط با مفاهیم جبری و استفاده از آنها در حل مسائل اشاره دارد و از تفکر جبری به عنوان توانایی فراتر از جبر یاد می‌کند. او تفاوت میان جبر و تفکر جبری را در این دیدگاه قرار می‌دهد که تفکر جبری می‌تواند به ارتقاء تفکر مسلط بر جبر کمک کند و مفاهیم ریاضیاتی را بهتر درک کرد.

مایکل شونفیلد[۴] (۱۹۸۵) عنوان می‌کند که تفکر جبری باعث درک عمیقی از اصول و مفاهیم جبری می‌شود و می‌توان ارتباطات میان موضوعات مختلف ریاضی را یافت و مسائل را به صورت منطقی و دقیق حل کرد. به عبارت دیگر، تفکر جبری به فرد امکان می‌دهد با استفاده از مفاهیم جبری به تحلیل و استدلال درباره مسائل ریاضی بپردازد و به روش‌های دقیق و مستدل در ریاضیات پیش برود. جبر نقش حیاتی در توسعه تفکر ریاضی و حل مسائل ریاضی دارد. جبر، از طریق مفاهیم و عملکردهای خود، دانش‌آموزان را به تفکرتحلیلی، استدلالی و اثباتی سوق می‌دهد و به آنها کمک می‌کند تا الگوها و قوانین ریاضی را درک کرده و از آنها در حل مسائل استفاده کنند (کیل پاتریک وسوافورد[۵]،۲۰۰۱) .

هدف ازآموزش جبر و تفکر جبری شامل توسعه تفکر انتزاعی و انعطاف‌پذیری در حل مسائل ریاضی، تقویت مهارت‌های ارتباطی و تفکری، ایجاد ارتباط بین مفاهیم جبری و دیگر حوزه‌های ریاضی، و توسعه توانایی‌های مدلسازی و نمایش‌های چندگانه است (کی یرن و همکاران ،۲۰۱۷) .

کاپوت، سه سطح برای تفکرجبری ارائه کرد که بعدها توسط پانتزی[۶] و همکاران (۲۰۱۸) به چهار سطح ذیل گسترش یافت.

۱-تعمیم محاسبات[۷]: شامل توانایی استفاده از تعمیم برای برطرف کردن مسائل ریاضی مختلف است. فرد قادر است با استفاده از گسترش عملیات ریاضی و ویژگی‌های آن، به تعمیم‌های جدیدی از مفاهیم ریاضی دست یابد.

۲-تفکر تابعی[۸]: توانایی نمایش الگوها و نمونه‌ها به صورت معادله، تصویر، جدول توابع و نمودار است. فرد قادر است متغیرهای مستقل و وابسته را شناسایی کند و رابطه بین آنها را نمایش دهد. همچنین، قادر است تغییرات و تناظر بین این متغیرها را درک کند.

۳-مدلسازی[۹]:این سطح تفکر جبری شامل استفاده از زبان مدل‌سازی است. فرد با استفاده از زبان مدل‌سازی، قادر است تعمیم‌ها را بیان کند و رابطه بین مقادیر را شناسایی کند. او می‌تواند این رابطه را در یک مدل ریاضی مناسب نمایش دهد و با استفاده از این مدل، مسائل را حل کند و جواب را با توجه به شرایط سؤال توجیه کند.

---

۱. Alcock & Simpson
۲. Stacey
۳. Sternberg
۴. Schoenfeld
۵. Kilpatrick, J& Swafford, J
۶. Demetra Pitta-Pantazi
۷. Generalized Arithmetic
۸. Function Thinking
۹. Modeling

۴-اثبات جبری[1]: در این سطح، تفکر جبری شامل استفاده از اثبات جبری است. فرد می‌تواند با آزمایش به طور سیستماتیک و دقیق در اثبات نتایج پیش بروند و از قوانین و قضایا جبری استفاده کنند.

در مقطع متوسطه اول، جبر به صورت مباحث جداگانه درس داده می‌شود و موضوعاتی مانند اصول جمع و ضرب در جبر، معادلات و نامعادلات، معادلات دو مجهولی، سیستم‌های معادلات، توان‌ها و رادیکال‌هاو تعریف تابع، بازنویسی توابع، توابع خطی و بررسی خاصیت‌های آن‌ها و مفاهیم پایه تابعی را در بر می‌گیرد. در دوره دوم متوسطه نیز جبر به عنوان یکی از مباحث درسی در رشته ریاضی آموزش داده می‌شود. در این مقطع نیز مفاهیم پایه جبری مانند تابع، چندجمله‌ای، انواع توابع و خواص آن‌ها، معادلات بازگشتی، آشنایی با روش‌های حل معادلات دیفرانسیل و خطی، و کاربرد آن‌ها در مسائل واقعی را در بر می‌گیرد.

چارچوب سازماندهی کاپوت ابزاری ارزشمند برای درک و تدریس تفکر جبری است با استفاده از این چارچوب، معلمان می‌توانند درک بهتری از نیازهای دانش آموزان خود داشته باشند و می‌توانند درس‌هایی را طراحی کنند که به دانش آموزان کمک می‌کند تا در همه سطوح تفکر جبری پیشرفت کنند. جبر در مقطع متوسطه اول و دوره دوم متوسطه در سیستم آموزشی ایران به عنوان یکی از درس‌های ریاضی درس داده می‌شود. تعدادکم تحقیقات انجام شده در ایران بر پایه نظری تقسیم بندی سطوح تفکر جبری که توسط کاپوت ارائه شده است بررسی سطوح تفکر جبری دانش آموزان در ایران لازم می‌نماید.

اهمیت جبر و تفکر جبری و لزوم حمایت از دانش‌آموزان برای دستیابی به سطوح بالاتر تفکر جبری که به نوبه خود باعث شکوفایی و توسعه دانش‌آموزان و در نتیجه باعث رشد و توسعه جامعه می‌شود. برای ارائه راهکار برای توسعه تفکر جبری لازم است قبل از ارائه هر طرحی، سطوح تفکر جبری دانش‌آموزان بررسی و با توجه به این سطوح وتوانایی‌ها و ضعف دانش‌آموزان در هر سطح از تفکر جبری برنامه ای خاص و مدون ارائه کرد.

این پژوهش می‌تواند به درک عمیق‌تری از رشد و توسعه تفکر جبری در دانش‌آموزان کمک کند و در تدریس و یادگیری ریاضی نقش مهمی ایفا کند. یکی از مهم‌ترین دلایل ضرورت پژوهش در این حوزه، نیاز به بررسی و توسعه تفکر جبری دانش‌آموزان است. رشد و توسعه تفکر جبری در دانش‌آموزان به عنوان یک مهارت ریاضی بسیار ارزشمند است و برای یادگیری مفاهیم ریاضی، حل مسائل و ارتباط با مسائل واقعی بسیار مهم است.

جدول۱. معیار ارزیابی سطوح تفکر جبری دانش‌آموزان

معیار ارزیابی سطح تعمیم محاسبات	معیارارزیابی تفکر تابعی	معیارارزیابی مدلسازی	معیارارزیابی اثبات جبری
مجموعه‌های اعداد ت۱-درک خصوصیات	ف۱-پیدا کردن قانون یک الگو و نمایش نمادین آن	م۱-تفسیر محتوا، شناسایی مقادیر	آ۱-استفاده از نمادها
ت۲-نوشتن خواص عملیات ریاضی به جبری و درک متغیر	ف۲-درک تغییرات و روابط بین متغیرها	م۲- نمایش رابطه در مدل ریاضی مناسب	آ۲-توجیه حدس‌ها
ت۳-تعمیم عملیات ریاضی و خصوصیات آنها	ف۳-تشخیص متغیر وابسته و مستقل	م۳-حل مسئله	
ت۴-توجه به ساختار بیش از محاسبات	ف۴-نمایش روابط بین آنها	م۴-توجیه جواب با توجه به شرایط سؤال	
ت۵- حل نامعادلات یک مجهولی			
ت۶-حل معادلات یک مجهولی			
ت۷-توانایی تبدیل عبارات کلامی به جبری			
ت۸-توانایی تبدیل عبارات جبری به کلامی			
ت۹-درک هم ارزی جبری			
ت۱۰-درک هم ارزی حسابی			

[1] .Algebraic Proof

تحقیقات داخلی و خارجی

مطالعه‌ای توسط حسین رفیعی در سال ۱۳۹۹ با عنوان تأثیر آموزش جبری بر نگرش دانش‌آموزان دوره ابتدایی به ریاضی انجام شده است واین مطالعه نشان می‌دهد که آموزش جبری می‌تواند به بهبود نگرش دانش‌آموزان به ریاضی کمک کند و کمک کند تا ریاضی را جالب‌تر و جذاب‌تر بدانند.

محمدحسین ذبیحی در سال ۱۳۹۸ مطالعه ای با عنوان تأثیرآموزش جبری بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان دوره ابتدایی انجام و نتایج نشان داد که آموزش جبری می‌تواند به بهبود عملکرد ریاضی دانش‌آموزان کمک کند، همچنین کمک می کند تا نمرات بالاتری در آزمون‌های ریاضی کسب کنند.

عابدی و رمضان[۱] در سال ۲۰۱۶ در مطالعه‌ای با عنوان بررسی مهارت‌های تفکر جبری دانش‌آموزان مدارس متوسطه نشان دادندکه دانش‌آموزان توانایی‌های تفکر جبری متفاوتی دارند و برخی ازآنها در تفکر جبری توانایی بیشتری داشتند.

مطالعه بویوکوزتورک[۲] و همکارانش در سال ۲۰۱۷ با عنوان تحلیل مهارت‌های تفکر جبری دانش‌آموزان دبیرستانی نشان داد که سطوح تفکر جبری دانش‌آموزان دبیرستان در ترکیه با توجه به متغیرهای مختلف متفاوت است و نتایج نشان داد که عواملی مانند جنسیت و نوع مدرسه ممکن است بر سطح تفکر جبری تأثیرگذار باشند.

در تحقیق کارد [۳]و همکارانش (۲۰۱۲)، دانش‌آموزانی که از تفکر جبری استفاده می‌کردند، در حل مسائل ریاضی عملکرد بهتری داشتند. این امر به این دلیل است که تفکر جبری به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا روابط بین کمیت‌ها را درک کنند و از این اطلاعات برای حل مسائل استفاده کنند. در این تحقیق، دانش‌آموزان به دو گروه تقسیم شدند: گروه اول آموزش تفکر جبری دریافت کردند و گروه دوم آموزش جبر سنتی دریافت کردند. سپس، هر دو گروه دانش‌آموزان در حل مسائل ریاضی مورد ارزیابی قرارگرفتند. نتایج نشان داد که دانش‌آموزانی که آموزش تفکر جبری دریافت کرده بودند، در حل مسائل ریاضی عملکرد بهتری داشتند. این تحقیق نشان می‌دهد:

۱-دانش‌آموزانی که از تفکر جبری استفاده می‌کنند، در حل مسائل ریاضی عملکرد بهتری دارند.

۲-تفکر جبری به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا روابط بین کمیت‌ها را درک کنند.

۳-آموزش تفکر جبری می‌تواند یک ابزار ارزشمند برای بهبود حل مسئله ریاضی دانش‌آموزان باشد.

روش شناسی پژوهش

در مطالعات پژوهشی کاربردی – توصیفی، پژوهشگر به بررسی و توصیف ویژگی‌ها، وضعیت‌ها، رویدادها و پدیده‌های موجود در یک موضوع یا مسئله می‌پردازد. در این نوع پژوهش تمرکز اصلی بر روی توصیف و تحلیل کیفی داده‌ها و اطلاعات است. ابتدا نیاز به تعیین یک چارچوب مناسب برای شناسایی و سنجش سطوح تفکر جبری دانش‌آموزان بود. برای انجام پژوهش حاضر، نیاز بود که راهی برای ارزیابی تفکرجبری دانش‌آموزان وجود داشته باشد. از این رو، نظریات صاحب‌نظران آموزش ریاضی کاپوت(۲۰۰۸) و پانتزی(۲۰۱۸) و پژوهش‌های مشابه خارجی بررسی شد. در نهایت، یک چارچوب همراه با معیارهای مربوط برای ارزیابی تفکر جبری دانش‌آموزان مشخص شد.

جامعه آماری در این پژوهش دانش‌آموزان دختر وپسر در تهران که در هنرستان‌های تهران در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱ در پایه دهم در حال تحصیل بودند که تعدادشان ۲۸۰۰۰ نفر بود. نمونه در پژوهش حاضر براساس روش نمونه گیری در دسترس می‌باشد وتعداد ۶۲ دانش آموز که در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱ پایه نهم را با موفقیت به پایان رسانده بود که ۳۱ نفر دختر و ۳۱ نفر دیگر پسر بودند.

---

۱. Abedi& Ramadan

۲. Büyüköztürk

۳. Card

آزمون محقق ساخته جهت ارزیابی سطوح تفکرجبری دانش‌آموزان براساس چارچوپ نظری ارائه شده توسط کاپوت و پانتزی با استفاده از منابع سؤالات خارجی (آزمون تیمز[1] – پرلز[2] وپانتزی[3], ۲۰۲۳) و منابع داخلی تهیه و براساس چارچوب ایجاد شده وبا توجه به شرایط داخلی بومی‌سازی شد. روایی محتوایی، به وسیله نظرات کارشناسان متخصص در زمینه محتوای آزمون مورد نظر، با تعداد ۳۰ سؤال در اختیار ۱۰ نفر از اساتید و دبیران ریاضی قرار داده شده که از این تعداد ۱۷ سؤال با مقدار روایی(CVR)کمتر از ۰/۶۲ حذف گردید و۱۳ سؤال انتخاب شد.

برای تعیین پایایی سؤالات، از میان سؤالاتی که روایی آنها تأیید شده بود در اختیار ۲۳ دانش‌آموز برای پاسخگویی قرار داده شدکه مقدار ضریب آلفای کرونباخ ۰/۸۱ بدست آمد که پایایی آزمون تأییدگردید.

روش اجرا:

در این پژوهش بدون دخالت در پدیده، سعی شده که پدیده به‌طور عینی و دقیق توصیف شود. آزمون در چهار مدرسه دخترانه و پسرانه به تعداد برابر ۳۱ نفر دختر و ۳۱ نفر پسر بصورت آزمون حضوری برگزار گردید. در ادامه پاسخنامه دانش آموزان جمع آوری و سپس براساس نمرات هر سؤال در هرسطح ازسطوح تفکر جبری که در جدولی درج و بارم بندی شده بود پرسشنامه‌ها تصحیح گردیدو نتایج در هر قسمت مورد تحلیل قرار گرفت.

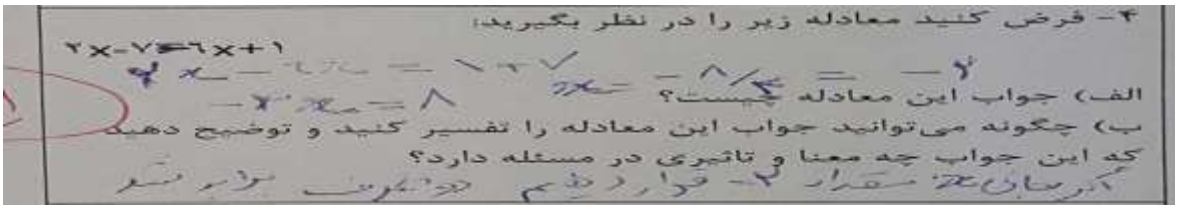
نمونه ای از جواب‌های دانش آموزان در چهار سطح تفکر جبری:

سطح تعمیم محاسبات–ت۶

معادله مقابل را در نظر بگیرید: $2x - 7 = 6x + 1$

الف) جواب این معادله چیست؟

ب) چگونه می‌توانید جواب این معادله را تفسیر کنید و توضیح دهید که این جواب چه معنا و تأثیری در مسئله دارد؟



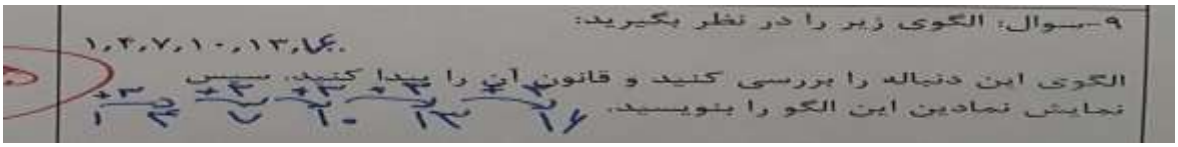
تصویر ۱. نمونه پاسخ دانش‌آموزان ازسؤال ۴آزمون

دانش‌آموز عملکرد بسیار خوبی در قرینه کردن متغیرها و اعداد در انتقال به طرفین تساوی داشته است.

سطح تفکر تابعی–ف۱

– الگوی مقابل را در نظر بگیرید : ۱ ,۴,۷,۱۰,۱۳,....

الگوی این دنباله را بررسی کنید و قانون آن را پیدا کنید.



تصویر ۲. نمونه پاسخ دانش‌آموزان از سؤال ۹ تفکر تابعی –ف۱

در تصویر ۲ به خوبی با مفهوم الگوی آشنا بوده ولی از ارائه آن بصورت عبارت جبری ناتوان می‌باشد.

سطح مدلسازی (م۱) در سطوح تفکر جبری

سؤال–دو دونده به نام‌های آرمین و رضا در مسافت ۴۰۰ متر شرکت می‌کنند. در این مسابقه، رضا با سرعت ثابتی دویده و مسافت را در ۸۰ ثانیه طی می‌کند. حالا می‌خواهیم بدانیم که آرمین با چه سرعتی باید بدود تا در این مسابقه بتواند از رضا جلو بزند ؟

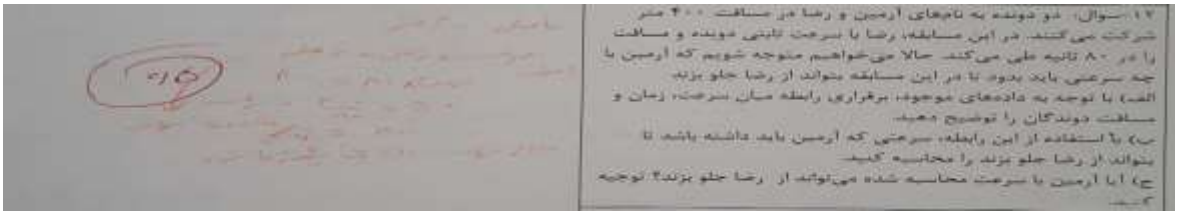
الف) با توجه به داده‌های موجود، برقراری رابطه میان سرعت، زمان و مسافت دوندگان را توضیح دهید.

---

[1] .TIMSS
[2] .PIRLS
[3] .Pantazi

ب) با استفاده از این رابطه، سرعتی که آرمین باید داشته باشد تا بتواند از رضا جلو بزند را محاسبه کنید.

ج) آیا آرمین با سرعت محاسبه شده می‌تواند از رضا جلو بزند؟ توجیه کنید.



تصویر ۳. نمونه پاسخ دانش‌آموزان از سؤال ۱۲

در تصویر ۳ دانش‌آموز سؤال را درک و متغیرها شناسایی کرده است. از عبارت جبری استفاده نکرده است.

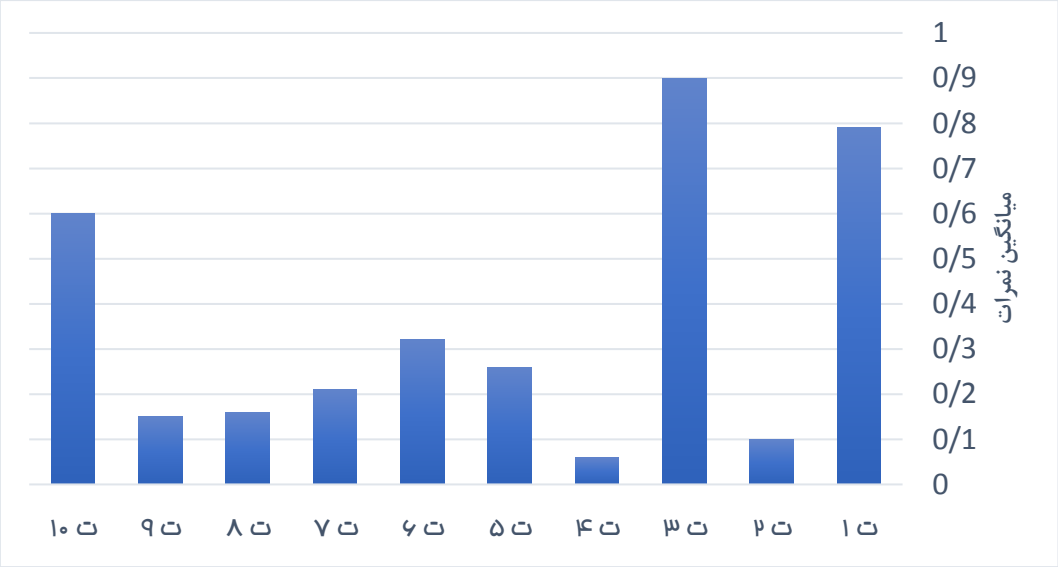
سوالات پژوهش

۱. دانش‌آموزان هنرستان‌های فنی وحرفه ای در چه سطحی از تفکر جبری قرار دارند؟

۲. آیا بین سطوح تفکر جبری دانش‌آموزان دخترو پسر مدارس فنی و حرفه ای تفاوت معناداری وجود دارد؟

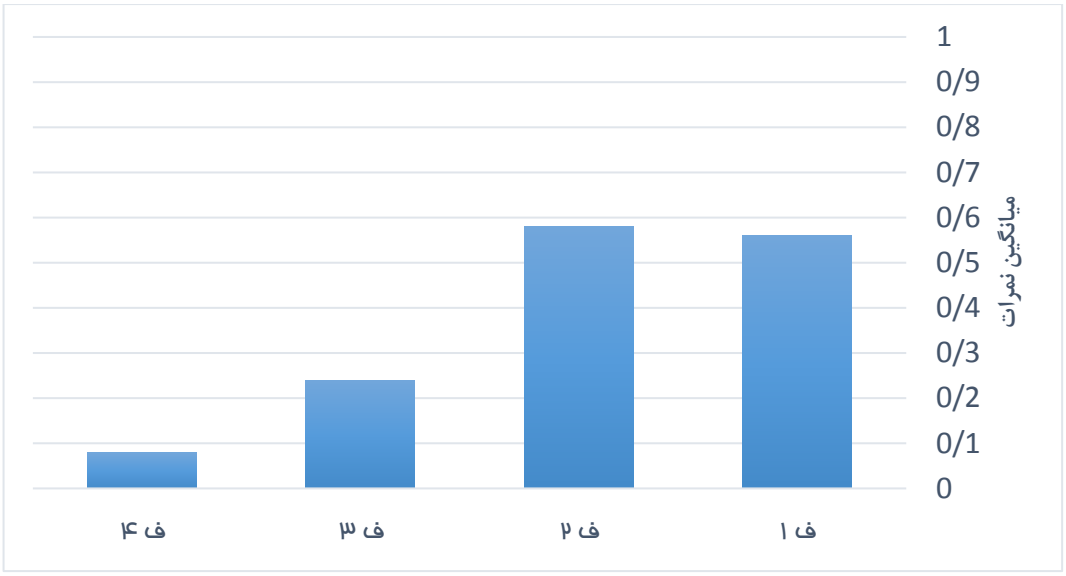
یافته‌های پژوهش

نتایج توصیفی : سطوح تفکر جبری دانش‌آموزان بدست آمده است. که عبارتند از:



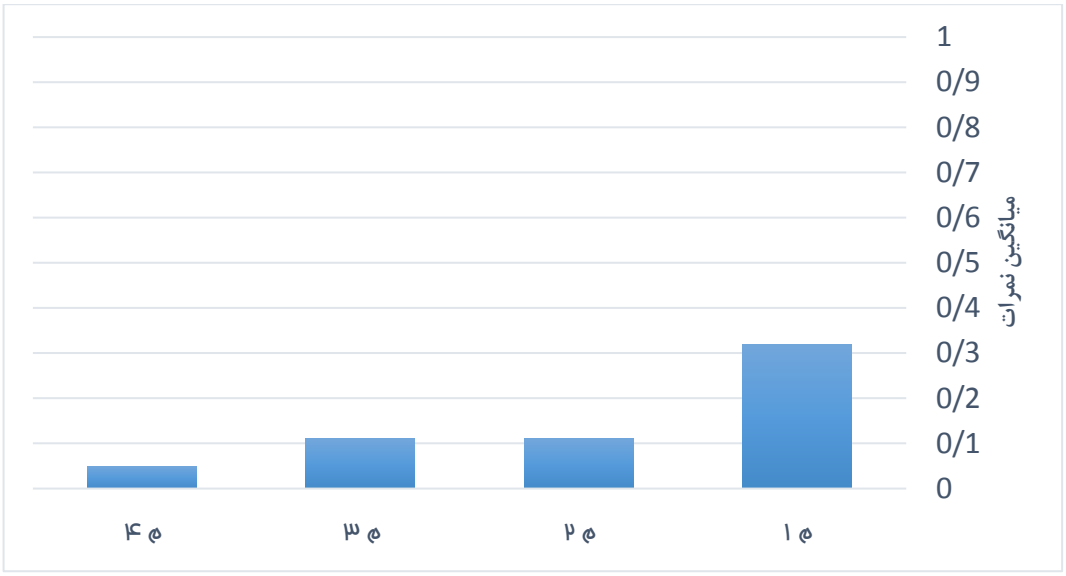
نمودار ۱. مقایسه عملکرد دانش‌آموزان در معیارهای سطح تعمیم محاسبات (ت)

۱. در نمودار شماره۱ در معیارهای سطح تعمیم بهترین عملکرد را در معیار (ت۳) تعمیم عملیات ریاضی و ضعیف‌ترین عملکرد درمعیار توجه به ساختار بیش از محاسبات (ت۴) توسط دانش‌آموزان کسب شده است.



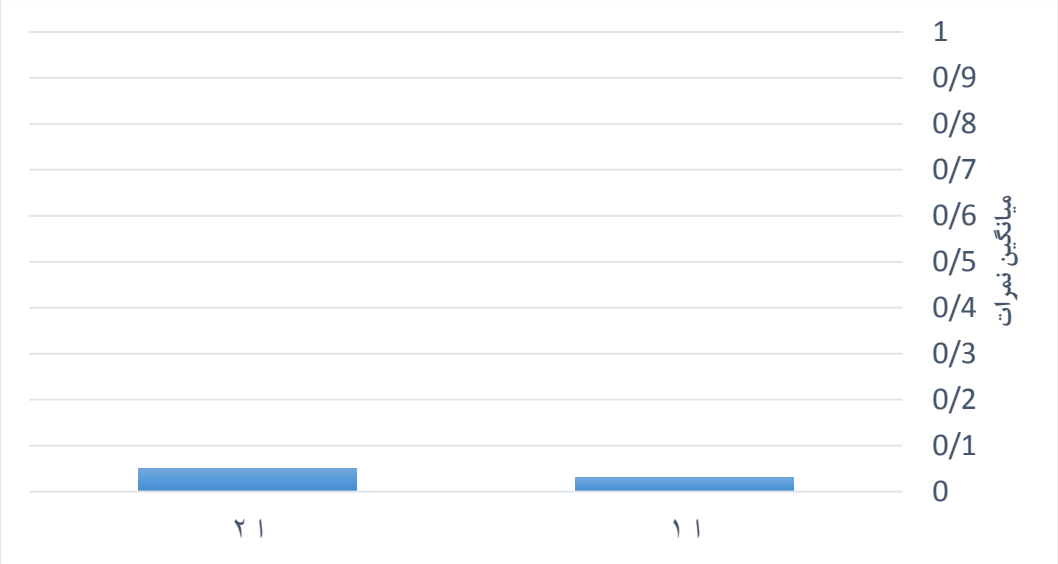
نمودار ۲ . مقایسه عملکرد دانش‌آموزان در معیارهای سطح تفکر تابعی (ف)

۲. درنمودارشماره دوعملکرد دانش‌آموزان در معیارهای تفکرتابعی درمعیار نمایش داده شده است که دانش‌آموزان درپیدا کردن قانون یک الگوونمایش نمادین آن (ف۱) بهترین عملکرد و در نمایش روابط بین آنها (ف۴) ضعیف ترین عملکرد را داشته اند.



نمودار ۳ . مقایسه عملکرد دانش‌آموزان در معیارهای سطح مدلسازی (م)

۳. با توجه به نمودار شماره سه در سطح مدلسازی (م) بالاترین نمره معیار (م۱) در تفسیر محتوا، شناسایی مقادیر و کمترین نمره معیار(م۴) در توجیه جواب کسب کرده‌اند.



نمودار۴ . مقایسه عملکرد دانش‌آموزان درسطح اثبات جبری (ا)

۴. نمودار شماره چهار که عملکرد دانش‌آموزان در سطوح تفکر جبری در معیار اثبات جبری می‌باشد، نشان می‌دهد که در این سطح درمعیاراستفاده از نمادها (۱ا) ضعیف‌تر از توجیه حدس (۲ا) عمل کرده‌اند.

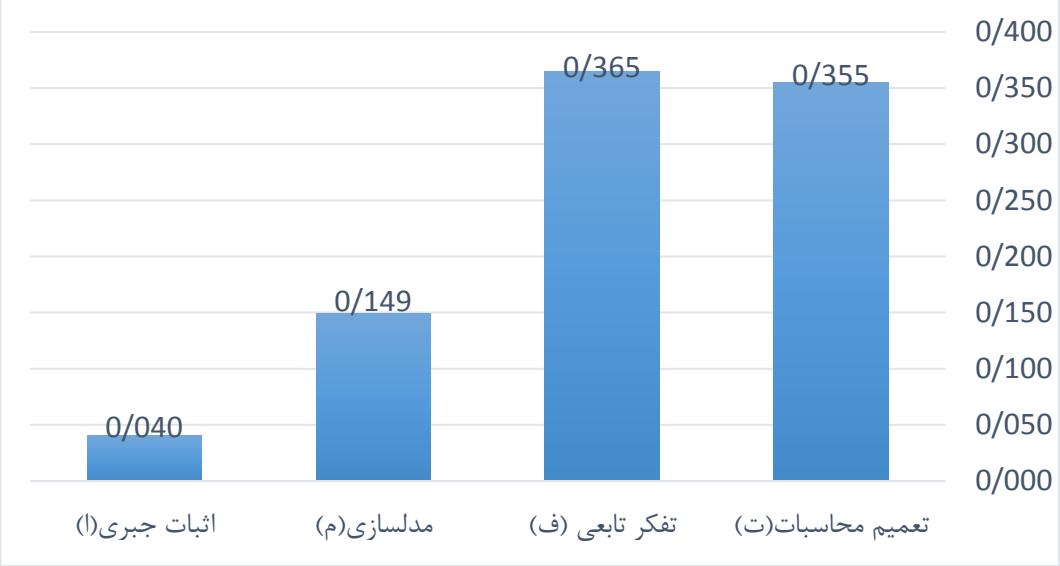
بررسی آمار استنباطی

برای تست نرمال بودن داده‌ها در سطوح تفکر جبری از آزمون کولموگروف –اسمیرنف استفاده شده نتایج بدست آمده ازاین آزمون نشان می‌دهدکه تمام داده‌ها در سطوح تفکر جبری بصورت نرمال پراکنده نشده‌اند. زیرا سطح معناداری همه سطوح تفکرجبری کمتراز ۰/۰۵ است. ولی با توجه به قانون حدمرکزی چون تعداد داده‌ها بیشتر از ۳۰ است، می‌توان از آزمون‌های پارامتریک برای مقایسه سطوح تفکرجبری بین دختران و پسران مانند آزمون تی استفاده کرد.

برای بررسی تساوی واریانس‌های دو گروه دختر و پسر در چهار سطح تفکر جبری از «آزمون لوین» استفاده شد، در این آزمون نتایج عبارتند از در سطح تعمیم، آزمون لوین ۰/۶۱ که در سطح ۰/۰۵ تایید تساوی واریانس‌ها و نتیجه آزمون تی ۰/۷۳۶ که در سطح ۰/۰۵ نشان از عدم وجود تفاوت معنادار در دو گروه می‌باشد. در سطح تفکر تابعی، آزمون لوین ۰/۰۴۹در سطح ۰/۰۵ نشان از عدم برابری واریانس‌ها دو گروه و آزمون تی ۰/۰۱۳ که درسطح ۰/۰۵ نشان از وجود تفاوت معناداری بین دو گروه وجود دارد. در سطح مدلسازی آزمون لوین ۰/۰۱۱۸که در سطح ۰/۰۵ نشان از نابرابری واریانس‌ها بود و آزمون تی ۰/۰۷۳ که بزرگتر از ۰/۰۵و نشان از عدم وجود تفاوت معناداری بین دو گروه بوده است. در سطح اثبات جبری، آزمون لوین ۰/۴۱۹ که در سطح ۰/۰۵ نشان از برابری واریانس‌ها بود و آزمون تی ۰/۷۰۳ که بزرگتر از ۰/۰۵و نشان از عدم وجود تفاوت معناداری بین دو گروه است.

پاسخ پرسش اول :دانش‌آموزان هنرستان‌های فنی وحرفه ای در چه سطحی از تفکر جبری قرار دارند؟

بررسی میزان تفکر جبری دانش‌آموزان پایه نهم (ورودی دهم) در مقطع متوسطه نشان داد که دانش‌آموزان در سطح تفکر تابعی عملکرد بهتری نسبت به سایر سطوح داشتند. هر چند بین میانگین نمرات سطح تفکر تابعی و تعمیم محاسبات اختلاف کمی وجود دارد. درصد میانگین نمرات کسب شده توسط دانش‌آموزان در سطح تعمیم محاسبات ۳۵/۵٪، در سطح تفکر تابعی ۳۶/۵٪، در سطح زبان مدلسازی ۱۴/۹٪، و در سطح اثبات جبری ۴٪، بود. درصد میانگین نمره کسب شده کلی در همه سطوح توسط دانش‌آموزان ۲۲/۷٪ درصد بود که نشان‌دهنده عملکرد ضعیف آنان است. (نمودار ۵)



نمودار ۵ . مقایسه درصد میانگین نمرات سطوح تفکر جبری دانش‌آموزان

پاسخ پرسش دوم : آیا بین سطوح تفکر جبری دانش‌آموزان دختر و پسر هنرستانهای فنی و حرفه‌ای تفاوت معنا داری وجود دارد؟

جدول ۲ .نتایج آزمون تی دو گروه مستقل در سطوح تفکر جبری

سطوح تفکر جبری	آزمون لوین		t	درجه آزادی	سطح معناداری
	سطح معناداری	F			
واریانس‌های همگن	۰/۵۲۲	۰/۴۱۵	۱/۰۴۷	۶۰	۰/۲۹۹
واریانس‌های ناهمگن			۱/۰۴۷	۵۹/۵۸۳	۰/۲۹۹

با توجه به جدول ۲، سطح معناداری آزمون لوین برابر با ۰/۵۲۲ می‌باشد و چون بزرگتر از ۰/۰۵ است، برابری واریانس‌ها تایید می‌شود و از سطر اول جدول برای تفسیر نتیجه استفاده شد. سطح معناداری آزمون تی برابر با ۰/۲۹۹ است و چون از ۰/۰۵بزرگتر است، نتیجه می‌شود که بین سطوح تفکر جبری دو گروه دختر و پسر تفاوت معناداری وجود ندارد.

نتایج آزمون تی نشان داد که بین سطوح تفکر جبری دانش آموزان دختر و پسر در سطوح تعمیم محاسبات و مدلسازی واثبات جبری تفاوت معناداری وجود ندارد. فقط در سطح تفکر تابعی عملکرد دختران بهتر از پسران می‌باشد.از طرفی دیگر با توجه به جدول۲ و نتایج آزمون تی دو گروه مستقل در مجموع سطوح تفکر جبری تفاوت معناداری بین دانش آموزان دختر وپسر وجود ندارد.

بحث و نتیجه‌گیری

تفکر جبری یک مهارت ضروری برای درک عمیق‌تر ریاضیات است. این مهارت به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا روابط عمیق‌تری بین مفاهیم و مولفه‌های مختلف ریاضی برقرار کنند. این امر به دانش‌آموزان این امکان را می‌دهد که از تفکر و کار با اعداد و معیارهای خاص به درک و استدلال با روابط عمومی و مشترک بین این مفاهیم دست یابند. تفکر جبری، مهارتی ضروری برای یادگیری ریاضی است. دانش‌آموزانی که تفکر جبری را توسعه می‌دهند، می‌توانند روابط بین مفاهیم ریاضی را بهتر درک کنند. این امر به آنها کمک می‌کند تا مسائل ریاضی را به‌طور مؤثرتری حل کنند. این تحقیق، اهمیت تفکر جبری را در جهان و آموزش مورد بررسی قرار داد. محققان از چارچوبی استفاده کردند که از دیدگاه‌های کاپوت و کی یرن الهام گرفته شده بود. نتایج نشان داد که دانش‌آموزان پایه نهم، به‌طور کلی، در سطح پایینی از تفکر جبری قرار دارند. بیشتر آنها، عبارات ریاضی را به‌صورت محاسباتی می‌بینند.

دانش‌آموزانی که دیدگاه عملیاتی به علامت تساوی دارند، در انجام تکالیف مرتبط با تفکر تابعی عملکرد مطلوبی ندارند. این امر به این دلیل است که آنها نمی‌توانند روابط بین دو طرف تساوی را ببینند و آنها را به یکدیگر تبدیل کنند. که برای بهبودآن باید دیدگاه

ساختاری و درک هم‌ارزی را دانش‌آموزان توسعه داده شود. این امر می‌تواند از طریق فعالیت‌های آموزشی و تعاملات معلم با دانش‌آموزان صورت گیرد.

تفکر تابعی به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا روابط بین دو یا چند متغیر را درک کنند. این امر برای درک مفاهیم ریاضی مانند توابع، حد، مشتق، انتگرال و معادلات دیفرانسیل ضروری است. عدم توانایی دانش‌آموزان در تفکر تابعی می‌تواند منجر به مشکلات متعددی در یادگیری ریاضی شود. به عنوان مثال، دانش‌آموزانی که نمی‌توانند روابط بین دو متغیر را درک کنند، ممکن است در حل مسائل جبری و حسابی مشکل داشته باشند. همچنین، این دانش‌آموزان ممکن است در درک مفاهیم پیشرفته‌تر ریاضی مانند توابع، حد و مشتق مشکل داشته باشند. بنابراین، تلاش برای ارتقاء تفکر تابعی دانش‌آموزان امری بسیار ضروری است. معلمان می‌توانند نقش مهمی در این زمینه ایفا کنند. معلمان می‌توانند با استفاده از فعالیت‌ها و تکالیف مختلف، به دانش‌آموزان کمک کنند تا تفکر تابعی خود را توسعه دهند.

تکالیف الگو یکی از راه‌های مؤثر برای تقویت تفکر تابعی دانش‌آموزان است. این تکالیف به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا الگوها را در داده‌ها شناسایی کنند و روابط بین متغیرها را درک کنند. این امر می‌تواند از طریق استفاده از فعالیت‌ها و تکالیف مرتبط با الگوها، توجیه تفکر تابعی به دانش‌آموزان، ارائه بازخورد سازنده به دانش‌آموزان و ایجاد فرصت‌های یادگیری فردی و گروهی انجام شود.

ایجاد فرصت‌ها و وسایل آموزشی مناسبی که به دانش‌آموزان اجازه دهد تا مفاهیم تابعی را در محیطی تعاملی و عملی ارتقاء دهند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این امر می‌تواند از طریق استفاده از فناوری، ابزارهای آموزشی و فعالیت‌های عملی انجام شود. همچنین باید به شناخت فرصت‌های موجود در کتاب‌های درسی و منابع آموزشی دقت کرد و از آنها برای ترغیب دانش‌آموزان به تفکر تابعی بهره برند. این امر می‌تواند از طریق استفاده از فعالیت‌های تکمیلی، بحث‌های گروهی و پروژه‌های فردی انجام شود. تفکر تابعی می‌تواند از طریق تکالیف و فعالیت‌های آموزشی مناسب ارتقاء یابد. این تکالیف باید به گونه‌ای طراحی شوند که دانش‌آموزان را به تفکر جبری ترغیب کنند و درک مفاهیم ریاضی را تسهیل کنند. تکالیف الگویی، یکی از بهترین راه‌ها برای ایجاد این فرصت‌ها هستند. چند نمونه از تکالیف الگویی عبارتند از:۱-پیدا کردن الگو در یک سری اعداد. ۲-رسم نمودار برای نمایش یک رابطه بین دو متغیر۳-تجزیه یک مسئله ریاضی به اجزای تشکیل دهنده آن ۴-یافتن راه‌های مختلف برای حل یک مسئله ریاضی این تکالیف می‌توانند به دانش‌آموزان کمک کند تا درک بهتری از مفاهیم ریاضی مانند تابع، رابطه و ساختار داشته باشند و چند نکته برای طراحی تکالیف الگویی عبارتند :

۱-از دانش‌آموزان بخواهید که از روابط بین اعداد استفاده کنند، نه از اعداد به تنهایی. ۲-از دانش‌آموزان بخواهید که روابط بین اعداد را تعمیم دهند. ۳-از دانش‌آموزان بخواهید که راه‌های مختلف برای حل یک مسئله را پیدا کنند. ۴-با استفاده از این نکات، می‌توانید تکالیفی طراحی کنید که به دانش‌آموزان کمک کند تا تفکر تابعی خود را توسعه دهند. ۵-تفکر تابعی، توانایی درک و استفاده از روابط بین متغیرها است. این توانایی برای حل مسائل ریاضی و علمی ضروری است.

در اینجا چند پیشنهاد برای طراحان کلان آموزش وبرنامه‌ریزان آموزش ریاضی برای توسعه تفکر جبر دانش‌آموزان عبارت از:

-اولین قدم برای توسعه تفکر جبری در مدارس، تعیین اهداف آموزشی است. این اهداف باید به صورت رسمی در برنامه درسی و استانداردهای آموزشی معرفی شوند. اهداف باید مشخص، قابل اندازه‌گیری، قابل دستیابی، مرتبط و زمانی باشند.

-گام بعدی، توسعه منابع آموزشی و کتب درسی مناسب برای تفکر جبری است. این منابع باید از روش‌ها و مثال‌های متنوعی برای توضیح مفاهیم جبری استفاده کنند. منابع باید با نیازهای دانش‌آموزان و معلمان سازگار باشند.

-آموزش و توسعه معلمان نیز برای توسعه تفکر جبری ضروری است. معلمان باید مهارت‌های لازم برای آموزش مؤثر تفکر جبری را داشته باشند. دوره‌های آموزشی باید شامل روش‌ها و استراتژی‌های تدریس جبری مؤثر باشند.

-ایجاد فرصت‌های تفکر جبری خارج از محیط مدرسه نیز می‌تواند مفید باشد. این می‌تواند از طریق ایجاد رویدادها و مسابقات ریاضی و همچنین مشارکت معلمان و دانش‌آموزان در پروژه‌های محلی انجام شود. همچنین توسعه فناوری و دسترسی به منابع رایانه‌ای

نیز می‌تواند به توسعه تفکر جبری کمک کند. منابع آموزشی آنلاین و نرم‌افزارهای تعلیمی می‌توانند به دانش‌آموزان کمک کنند تا مفاهیم جبری را یاد بگیرند و تمرین کنند.

-انجام تحقیقات آموزشی در زمینه تفکر جبری نیز ضروری است. این تحقیقات می‌توانند بهبودهای مداوم در روش‌های آموزشی فراهم کنند.

-ایجاد سیستم‌های ارزیابی مناسب برای اندازه‌گیری توسعه تفکر جبری دانش‌آموزان نیز ضروری است. این ارزیابی‌ها باید به معلمان و مدیران مدارس اطلاعات لازم برای بهبود آموزش را فراهم کنند.

در انتها تعدادی از محدویتها این پژوهش را ذکر می‌شود.

-نتایج پژوهش فقط برای دانش‌آموزان پایه نهم ورودی دهم یک مدرسه خاص در تهران اجرا شده و در تعمیم نتایج آن باید احتیاط نمود. داده‌های پژوهش با استفاده ازآزمون‌های ساخته شده جمع‌آوری شد که ممکن است اعتبار کمتری نسبت به آزمون‌های استاندارد داشته باشند و ممکن است متغیرهای ناخواسته دیگری نیز بر نتایج پژوهش تأثیر گذاشته باشند که در طول پژوهش کنترل نشده‌اند وکمبود منابع به زبان فارسی، انجام پژوهش را با چالش‌هایی مواجه کرده است.

منابع

رفیعی، حسین. (۱۳۹۹). تأثیر آموزش جبری بر نگرش دانش‌آموزان دوره ابتدایی به ریاضی. *مطالعات تربیتی*، ۲۹(۲)، ۱۹۲-۱۷۵.

ذبیحی، محمدحسین. (۱۳۹۸). تأثیر آموزش جبری بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان دوره ابتدایی. *مطالعات تربیتی*، ۲۸(۲)، ۱۴۴-۱۲۳.

Abedi, A., & Ramadan, N. (۲۰۱٦). Investigating the Algebraic Thinking Skills of Middle School Students. *Journal of Educational and Psychological Research*, ٦(۳), ۱-۱۹.

Büyüköztürk, Ş., Şahin, Ç., Kılıç, Ç., & Akgün, Ö. E. (۲۰۱۷). An Analysis of High School Students' Algebraic Thinking Skills. *Journal of Education and Training Studies*, ٥(۹), ٦۸-۷۸.

Stacey, M. (۱۹۹۹). Algebraic thinking: A framework for teachers. *Mathematics Teacher*, ۸۲(٦), ۲٥-۲۹.

Sternberg, R. J. (۲۰۰۳). Wisdom, intelligence, and creativity synthesized. Cambridge University Press

Schoenfeld, A. H. (۱۹۹۲). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics*. Handbook of research on mathematics teaching and learning, ۳۳٤(۳۷۰), ۳۳٤.

Schoenfeld, A. H. (۱۹۸٥). Mathematical problem solving. Academic Press, Inc.

Alcock, L., & Simpson, A. (۲۰۱۹). *Ideas from Algebra. In L. Haggarty (Ed.), Teaching Mathematics in Secondary Schools: Theory and Practice* (pp. ۱٥٤-۱۷٤). Routledge.

Kaput, J. J. (۲۰۰۸). "*Algebraic Thinking and the Generalization of Arithmetic*". Lester, F. K. (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. ۳٥۹-۳۸٤). Information Age Publishing.

Pantazi, M. (۲۰۲۳). The levels of algebraic thinking of ninth graders in Greece. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, ٥٤(۱), ۱۱۱-۱۲٥.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (۲۰۰۱). Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academies Press.

Son, Richard J. A History of Mathematics. Princeton, NJ: Princeton University Press, ۱۹۹۷.

Card, S. K., Smith, M. S., & Au, K. H. (۲۰۱۲). The relationship between algebraic thinking and mathematical problem solving in middle school students. *Journal of Mathematical Behavior,* 31(2), 135-150.

Kieran, C. (۲۰۱٦). *Algebraic thinking: A historical perspective*. In P. Liljedahl & S. Oesterle (Eds.), The development of algebraic thinking: A historical perspective (pp. ۱-۱۲). Springer.

Facione, P. A. (۲۰۱۳). Critical Thinking: What It Is and Why It Counts. Insight Assessment.Retrieved

Copley, J. (۲۰۰۰). Mathematics in the middle school: A guide for teachers. Boston, MA: Allyn and Bacon.