

بررسی رفتارهای دینامیکی و شرایط دوام کیهانی مدل‌های انرژی تاریک در نظریه‌های گرانشی $f(T)$

ناصر محمدی‌پور^۱

چکیده

در این کار با در نظر گرفتن گرانش اصلاح یافته $f(T)$ به عنوان یکی از نامزدهای گرانشی انرژی تاریک که در آن T مقدار عددی پیچش است، رفتارهای دینامیکی این مدل‌ها را بررسی کرده و شرایط بقای کیهانی را برای آن‌ها به دست آورده‌ایم. ما نشان می‌دهیم که دو مسیر کیهانی با دوام در فضای فاز برای این دسته از مدل‌های انرژی تاریک وجود دارد: (۱) عالم از یک نقطه ناپایدار تابشی شروع و با عبور از یک نقطه زینی ماده وارد دوره شتاب‌دار دوسپته می‌شود. (۲) عالم از یک نقطه زینی تابشی وارد یک دوره پایدار مادی شده و نمی‌تواند وارد دوره کنونی با غالبیت انرژی تاریک گردد.

کلیدواژه‌ها: شرایط بقای کیهانی، انرژی تاریک، اصلاح گرانش، گرانش $f(T)$.

^۱ استادیار گروه علوم پایه دانشگاه فرهنگیان، ایران، نویسنده مسئول، naser.kurd@cfu.ac.ir

مقدمه

اخیراً داده‌های کیهانی نشان دهندهٔ یک دورهٔ انبساط شتاب‌دار از عالم هستند [1,2,3,4]. این شتاب توسط عبارتی به نام انرژی تاریک بیان می‌شود، که برای توصیف آن کاندیداهای زیادی با ویژگی‌های انرژی تاریک در نظر گرفته شده است.

یکی از مناسب‌ترین کاندیداهای ثابت کیهان‌شناسی است که البته از دو مشکل تنظیم ظریف و انطباق رنج می‌برد [5]. یک میدان دینامیکی اسکالر، با رفتار کوینتسنس یا فانتوم را نیز می‌توان به عنوان یکی دیگر از کاندیداهای نام برد [6].

رویکرد دیگری که ریشهٔ گرانشی دارد، اصلاح تئوری نسبیت عام اینشتین است. چرا که این نظریه ممکن است نتواند گرانش را در انرژی‌های خیلی بالا توصیف کند. بنابراین نظریه‌های اسکالر-تانسوری ارائه شدند که یکی از ساده‌ترین آن‌ها نظریهٔ برنزیدیکی است [7].

بین همهٔ نظریه‌های اصلاح گرانشی، می‌توان نظریهٔ اصلاحی $F(R)$ را به عنوان یکی از مناسب‌ترین توصیف‌ها برای انبساط شتاب‌دار کیهان در نظر گرفت [8,9].

در چند سال اخیر، نظریهٔ گرانشی اصلاح یافتهٔ $f(T)$ که در آن T اسکالر پیچش است به عنوان نامزدی برای توصیف انبساط شتاب‌دار دورهٔ کنونی عالم مورد توجه پژوهشگران این حوزه قرار گرفته است [13,14].

در ساده‌ترین حالت $f(T) = T$ ، که در این حالت نظریهٔ $f(T)$ به $TERG^1$ تقلیل یافته که برای اولین بار در سال ۱۹۲۸ توسط اینشتین^۲ ارائه گردید [12]. کارهای متعددی در این حوزه، با معرفی مدل‌هایی جهت توصیف انبساط شتاب‌دار عالم در عصر حاضر صورت گرفته است [13]-[18].

¹ Teleparallel Equivalent of General Relativity

² Einstein

در این کار ما شرایط بقای^۱ (دوام) کیهانی و رفتارهای دینامیکی این دسته از مدل‌های گرانشی توسعه یافته را بررسی خواهیم کرد. مقاله شامل پنج بخش است. در بخش دوم با مرور نظریه، به منظور مطالعه رفتار دینامیکی این مدل‌ها معادلات میدان را توسط چهار متغیر بدون دیمانسیون به عنوان یک سیستم خودگردان دوباره نویسی می‌کنیم. تجزیه و تحلیل سیستم معرفی شده در فضای فاز، به دست آوردن نقاط بحرانی و بررسی شرایط پایداری این نقاط را در بخش سوم استخراج می‌کنیم. در بخش چهارم با ارائه مدل‌های خاصی و نتایج عددی، رفتار دینامیکی و شرایط دوام آن‌ها را مورد مطالعه قرار خواهیم داد و در آخر نتیجه‌گیری و مروری بر کار را در بخش پنج ارائه می‌دهیم.

مدل‌های انرژی تاریک $F(T)$

الف. معادلات میدان و تعاریف

کنش را در کلی‌ترین حالت به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$S = \frac{1}{2k^2} \int dx^4 (f(T) + L_r + L_m), \quad (1)$$

که در آن $2k^2 = 16\pi G = 1$ ، $e = \sqrt{-g} = \det(e_\mu^i)$ ، T اسکالر پیچش، L_r و L_m به ترتیب چگالی‌های انرژی تابش و ماده موجود در عالم می‌باشند. در عالم فریدمان-رابرتسون-واکر تخت میدان ورین^۲ با عناصر متریک به صورت $g_{\mu\nu} = \eta_{ij} e_\mu^i e_\nu^j$ رابطه دارند. با وردش گرفتن از کنش (۱) نسبت به میدان‌های ورین، معادلات میدان به صورت زیر استخراج می‌شود [14]:

$$S_i^{\mu\nu} \partial_\mu (T) f_{TT} + [e^{-1} \partial_\mu (S_i^{\mu\nu}) - e_i^\lambda S_\rho^{\mu\nu} T_{\mu\nu}^\rho] f_T + \frac{1}{4} e_i^\nu f = \frac{1}{2} e_i^\rho T_\rho^\nu \quad (2)$$

$T_{\mu\nu}$ تانسور موتمن-انرژی ماده و $S_i^{\mu\nu} = e_i^\rho S_\rho^{\mu\nu}$ در عالم فریدمان-رابرتسون-واکر تخت مقدار

$T = -6H^2$ به دست می‌آید معادلات میدان (۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند [14]

^۱ Viability

^۲ Veribein

$$\begin{aligned} 12H^2 f' + f &= (\rho_r + \rho_m), \\ 48H^2 \dot{H} f'' - (12H^2 + 4\dot{H}) f' - f &= (P_r + P_m). \end{aligned} \quad (۳)$$

در عالمی که انرژی تاریک $f(T)$ غالب شده، می توان پارامتر معادله حالت را به صورت زیر نوشت:

$$w_{eff} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} \frac{2T^2 f'' + Tf' - T}{2Tf' - f - T} \quad (۴)$$

در اینجا $f' = \frac{df(T)}{dT}$ ، $f'' = \frac{d^2 f(T)}{dT^2}$ و نقطه، نشان دهنده مشتق نسبت به زمان است.

ب. معادلات خودگردان برای انرژی تاریک $F(T)$

در این بخش با معرفی متغیرهای دینامیکی بدون بعد زیر می خواهیم به مطالعه رفتارهای دینامیکی مدل های $f(T)$ به عنوان یک سیستم خودگردان در عمومی ترین حالت پردازیم

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\rho_r}{3H^2}, \\ x_2 &= -2f'(T), \\ x_3 &= -\frac{f(T)}{6H^2}, \\ x_4 &= -\frac{T}{6H^2} = 1. \end{aligned} \quad (۵)$$

با استفاده از متغیرهای تعریف شده می توان معادلات (۳) را به صورت زیر بارنویسی کنیم

$$\Omega_m = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \quad (۶)$$

با پارامترهای چگالی $\Omega_i = \frac{\rho_i}{3H^2}$ که i نشان دهنده حالت های تابش، ماده و انرژی تاریک

است. معادلات حرکت را برای سیستم تعریف شده (۵) به صورت زیر استخراج می کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dN} &= -2x_1\left(2 + \frac{\dot{H}}{H^2}\right), \\ \frac{dx_2}{dN} &= 2mx_2 \frac{\dot{H}}{H^2}, \\ \frac{dx_3}{dN} &= -(x_2 + 2x_3) \frac{\dot{H}}{H^2}, \\ \frac{\dot{H}}{H^2} &= \frac{-3x_2 - 3x_3 + x_1}{(2m+1)x_2}.\end{aligned}\tag{۷}$$

سیستم دینامیکی خودگردان (۷) بدون هیچ پیش فرضی می‌تواند دینامیک مدل‌های $f(T)$ را در عمومی‌ترین حالت توصیف کند. در اینجا $m = \frac{Tf''(T)}{f'(T)}$ ، $N = \ln\left(\frac{a}{a_i}\right)$ است. m را به صورت تابعی از r می‌نویسیم $m = m(r)$ که در آن $r = -\frac{Tf'(T)}{f(T)} = \frac{x_2}{2x_3}$ با مشتق‌گیری نسبت به N ، دینامیک r را بررسی کرده به طوری که می‌توان گفت: تحول دینامیکی سیستم روی منحنی $m(r)$ برای هر نقطه که خط $m = -r - 1$ یا $r = 0$ را قطع کند، متوقف می‌شود.

تجزیه و تحلیل فضای فاز

برای مطالعه رفتار دینامیکی سیستم ارائه شده در (۷) با قرار دادن $\frac{dx_i}{dN} = 0$ ، مجموعه‌ای از نقاط بحرانی را روی سه خط پیوسته با ویژگی‌های آن‌ها به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}L_1 : (x_1 = 0, x_2 = -x_3, x_3 = x_3) \\ \Omega_m = 0, \Omega_r = 0, \Omega_{DE} = 1, w_{eff} = -1,\end{aligned}\tag{۸}$$

$$\begin{aligned}L_2 : (x_1 = 0, x_2 = -2x_3, x_3 = x_3), m = 0 \\ \Omega_m = x_3, \Omega_r = 0, \Omega_{DE} = 1 - x_3, w_{eff} = 0,\end{aligned}\tag{۹}$$

$$\begin{aligned}L_3 : (x_1 = x_3, x_2 = -2x_3, x_3 = x_3), m = 0 \\ \Omega_m = 0, \Omega_r = x_3, \Omega_{DE} = 1 - x_3, w_{eff} = \frac{1}{3}.\end{aligned}\tag{۱۰}$$

^۱ a_i مقدار اولیه فاکتور مقیاس است.

با توجه به مقادیر به دست آمده، برای خط بحرانی L_1 مقدار $r = -\frac{1}{2}$ و برای خطوط L_2 و L_3 داریم: $m = 0$ و $r = -1$ که در $m = -r - 1$ صدق می کند که متناظر با یک نقطه بحرانی $(r = -1, m = 0)$ در نمودار (r, m) است که سیستم از آن می گذرد. خطوط بحرانی L_2 و L_3 به ترتیب متناظر با جواب های مقیاسی^۱ انرژی تاریک با ماده و تابش موجود در عالم هستند. همچنین خط بحرانی L_1 متناظر با نقاط دوسیه $(\dot{H} = 0)$ که در این حالت منحنی $m(r)$ از نقطه بحرانی $(r = -\frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2})$ در نمودار (r, m) می گذرد. ویژه مقادیر ماتریس اختلال را جهت بررسی پایداری این نقاط به دست می آوریم.

$$P_1: (x_1 = 0, x_2 = -x_3, x_3 = x_3)$$

P_1 متناظر با جواب های دوسیه به ازاء هر مقدار از x_3 با ویژه مقادیر

$$(-4, -\frac{3}{2} \pm \frac{2}{2m+1} \sqrt{\frac{m(m-1)}{2m+1} + \frac{8m^3 + 9m^2 + 3m + \frac{1}{4}}{(2m+1)^2} x_3})$$

و برای مقادیر $x_3 \neq 0$ ، نقاط دوسیه یک رباینده^۲ با ویژه مقادیر $(0, -3, -4)$ هستند.

P_2 : جواب های مقیاسی با ماده

$$P_2: (x_1 = 0, x_2 = -2x_3, x_3 = x_3)$$

در این دسته نقاط نسبت پارامترهای انرژی به صورت $(\frac{\Omega_m}{\Omega_{DE}} = \frac{x_3}{1-x_3})$ ، با ویژه مقادیر

$$0, -1, 3(1 + \frac{dm}{dr})$$

است که نشان دهنده وابستگی پایداری این نقاط به مشتق مرتبه اول m نسبت به r است. نقطه

$P_{2m}: (0, -2, 1)$ متناظر با نقطه غالبیت ماده در تحول سیستم با $(\Omega_m = 1, w_{eff} = 0)$ و ویژه

مقادیر بالا است که با در نظر گرفتن $x_3 = 1$ به دست می آید.

¹ Scaling solutions

² Attractor

با توجه به ویژه مقادیر بالا، شرط لازم برای داشتن دوره ماده استاندارد در این مدل $(m(r=-1)=0)$ است که P_2 یک نقطه زینی با شرط $(\frac{dm}{dr}|_{r=-1} > -1)$ است. در غیر این صورت نقطه P_2 یک نقطه پایدار است و این بدان معنی است که تحول سیستم در این نقطه متوقف، و سیستم نمی‌تواند وارد دوره انبساط شتاب‌دار با غالبیت انرژی تاریک شود.

P_3 : جواب‌های مقیاسی با ماده

$$P_3 : (x_1 = x_3, x_2 = -2x_3, x_3 = x_3)$$

در این نقاط انرژی تاریک تحول دوره تابش را با نسبت $(\frac{\Omega_r}{\Omega_{DE}} = \frac{x_3}{1-x_3})$ تقلید می‌کند به گونه‌ای که در نقطه‌ی $P_{3r} : (1, -2, 1)$ غالبیت تابش با $(\Omega_r = 1, w_{eff} = \frac{1}{3})$ و ویژه مقادیر

$$0, 1, 4(1 + \frac{dm}{dr})$$

اتفاق می‌افتد. اگر $(\frac{dm}{dr}|_{r=-1} > -1)$ این نقاط ناپایدار و در غیر این صورت نقاط زینی هستند.

یک مسیر کیهانی بادوام، از یک دوره تابش شروع و وارد یک دوره ماده می‌شود که توسط یک دوره انبساط شتاب‌دار تعیب می‌گردد. در فضای فاز این مسیر از یکی از نقاط P_3 شروع و با عبور از نقطه P_{3r} (غالبیت تابش) وارد یکی از نقاط P_2 شده و با گذر از نقطه P_{2m} (غالبیت ماده) توسط یکی از نقاط رباینده P_1 جذب می‌گردد. در نمودار (r, m) منحنی باید از نقطه $(r = -1, m = 0)$ بگذرد تا نقاط P_2 و P_3 را داشته باشیم. همچنین شرط داشتن نقاط جاذب دوسیه (P_1) در این نمودار، گذشتن منحنی از نقطه $(r = -\frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2})$ است.

بررسی مدل‌های خاص و نتایج عددی

آنچه را که در بخش‌های قبلی در عمومی‌ترین حالت مورد مطالعه قرار دادیم اکنون برای مدل‌های خاص توانی، لگاریتمی و نمایی جست‌وجو می‌کنیم. با رسم نمودار (r, m) در

می‌یابیم که در مدل $f(T) = T - \alpha\sqrt{-T}$ ، منحنی (r, m) از دو نقطه $(-1, 0)$ و $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ می‌گذرد. بنابراین، می‌توان گفت مدل فوق می‌تواند یک مسیر کیهانی بقادار را برای ما ارائه دهد که هم دارای دوره‌های تابش و ماده با دوره‌های غالبیت تابش و غالبیت ماده در این اعصار، و هم یک دوره دوسویه جهت توصیف انبساط شتاب‌دار در دوره اخیر با $(\Omega_{DE} = 1, w_{eff} = -1)$ باشد.

نتیجه‌گیری

رفتار دینامیکی تنوری‌های گرانشی $f(T)$ به عنوان یک سیستم دینامیکی خودگران مورد بررسی قرار گرفت. در فضای فاز و با تعریف دو متغیر m و r مجموعه نقاطی روی سه خط بحرانی به دست آمدند که متناظر با جواب‌های دوسویه، جواب‌های مقیاسی با ماده و جواب‌های مقیاسی با تابش بودند. شرایط پایداری به کمک ویژه مقادیر ماتریس اختلال مورد مطالعه قرار گرفت. جواب‌های دوسویه، جواب‌های جاذب (ربانده) و پایداری نقاط (جواب‌های) دیگر تابع مشتق مرتبه اول m نسبت به r بودند. مشاهده گردید که در رفتار دینامیکی این مدل‌ها در عمومی‌ترین حالت، یک مسیر کیهانی بادوام که با دوره تابش شروع و پس از عبور از دوره ماده وارد یک دوره انبساط شتاب‌دار دوسویه گردید. همچنین شرط داشتن هر یک از نقاط در نمودار (r, m) به دست آمد. در نهایت، این شرایط برای تعدادی از مدل‌ها بررسی گردید.

منابع

- [1] S. Perlmutter et al. [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Astrophys. J.* 517, 565 (1999).
- [2] C. L. Bennett et al., *Astrophys. J. Suppl.* 148,1 (2003).
- [3] M. Tegmark et al. [SDSS Collaboration], *Phys. Rev. D* 69, 103501 (2004).
- [4] S. W. Allen, et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 353, 457 (2004).
- [5] P. J. Steinhardt, *Critical Problems in Physics* (1997), Princeton University Press.
- [6] Y -F. Cai, E. N. Saridakis, M. R. Setare, J. Q. Xia, *Phys. Rep.*

493, 1, 1-60 (2010).

[7] C. Brans and C. H. Dicke, Phys. Rev. 124, 925 (1961).

[8] S. Nojiri and S. D. Odintsov, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 4, 115 (2007).

[9] S. Nojiri and S. D. Odintsov, arXiv: 0801.4843 [astro-ph];

arXiv: 0807.0685 [hep-th]; A. De Felice, S. Tsujikawa, Living Rev.

Rel. (2010). arXiv: 1002.4928.;

[10] S. Capozziello and M. Francaviglia, Gen. Rel. Grav. 40, 357 (2008); M. R. Setare, Int. J. Mod. Phys. D17, 2219, (2008); Astrophys. Space Sci.326, 27, (2010)

[11] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski and S. Tsujikawa, Phys. Rev. D, 75, 083504 (2007), arXiv: 0612180 [gr-qc]; S. Y. Zhou, E. J. Copeland and P. M. Saffin, JCAP, 0907, 009 (2009), arXiv: 0903.4610 [gr-qc].

[12] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. 217 (1928); 224 (1928).

[13] R. Ferraro and F. Fiorini, Phys. Rev.D, 75 084031 (2007).

[14] G. R. Bengochea and R. Ferraro, Phys. Rev. D 79, 124019 (2009); G. R. Bengochea, Phys. Lett. B, 695, 405 (2011).

[15] E. V. Linder, Phys. Rev. D, 81, 127301 (2010).

[16] P. Wu and H. Yu, Eur.Phys.J. C, 71, 1552 (2011), arXiv: 1008.3669 [astro-ph.CO].

[17] K. Bamba, C. Q. Geng, C. C Lee and L. W. Luo, JCAP 1101, 021 (2011), arXiv: 1011.0508 [astro-ph.CO].

[18] T. P. Sotiriou, B. Li and J. D. Barrow, Phys. Rev. D, 83, 104030 (2011), arXiv: 1012.4039 [gr-qc].

Investigating the Dynamic Behaviors and Cosmic Endurance Conditions of Dark Energy Models In Gravitational Theories $f(T)$

Naser Mohamadipoor¹

Abstract

In this work, considering the modified gravity of $f(T)$ as one of the gravitational candidates of dark energy in which T is the numerical value of torsion, the dynamic behaviors of these models are examined and have gotten the conditions of cosmic survival for them. We show that there are two durable cosmic pathways in phase space for this group of dark energy models: 1) The universe starts from an unstable radiant point and enters the accelerating period of duality by passing through a point of matter. 2) The universe has entered a stable material period from a radiant orbital point and cannot enter the current period with the predominance of dark energy.

Keywords: Cosmic Survival Conditions, Dark Energy, Gravity Correction, $f(T)$ Gravity.

¹ Assistant professor, Basic Sciences Department, Farhangian University, IRAN.
naser.kurd@cfu.ac.ir