

ارائه یک الگوی تدریس چند مرحله ای برای آموزش مسائل مربوط به کسرها

لیلا محمدنیا^۱

چکیده

در آموزش ریاضی همچون علوم دیگر، هدف نهایی از آموزش، یادگیری است. یادگیری به فراگیران کمک می کند تا مسائل مطرح شده در عرصه دانش مورد نظر را حل کنند. عوامل زیادی بر روی یادگیری دانش آموزان تاثیر گذار است که از آن جمله می توان نوع تدریس معلم را نام برد. یک تدریس مناسب و هوشیارانه زمانی اتفاق می افتد که معلم با اشتباهات و بدفهمی های رایج در موضوع تدریس آشنا بوده و بتواند مراحل تدریس خود را به نحوی پیش ببرد که احتمال ایجاد این اشتباهات و بدفهمی ها در دانش آموزان کاهش یابد. بدفهمی ناشی از این است که دانش آموز، مطلب را درک نکرده یا به غلط درک کرده است. در واقع این خطاها ناشی از بی دقتی یا بی توجهی به فعالیت نیستند و ریشه های عمیق تری دارند. یکی از دشوارترین مفاهیم ریاضیات مدرسه ای در همه سطوح تحصیلی، کسر می باشد. تعداد زیادی از دانش آموزان در حل مسائل مربوط به کسرها دچار بدفهمی می شوند. هدف از ارائه این مقاله شناسایی بدفهمی های رایج دانش آموزان در حل بعضی مسائل مربوط به کسرها و پیشنهاد راهکار تدریس مرحله ای برای برطرف کردن آنها می باشد.

کلمات کلیدی: آموزش، یادگیری، کسر، تدریس، بدفهمی.

۱. استادیار گروه ریاضی، مرکز شهید شرافت، پردیس نسیم، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران نویسنده مسئول. Imohamadnia@gmail.com

۱) مقدمه

آموزش مفاهیم بنیادی ریاضیات و شیوه های مقابله با دشواری هایی که به هنگام حل مسائل ریاضی برای دانش آموزان رخ می دهد، همواره یکی از دغدغه های اصلی معلمان ریاضی در کلاس درس بوده است. از سوی دیگر کسرها از پیچیده ترین و انتزاعی ترین مفاهیم ریاضی هستند که دانش آموزان با آنها مواجه هستند. کسرها بخش مهمی از ریاضیات مدرسه ای هستند که متاسفانه در برخی موارد به جای یک آموزش و یادگیری مفهومی، به صورت قواعد صوری و حفظی آموزش داده می شوند (هیبرت و بهر، ۱۹۸۸).

نتایج تیمز نشان می دهد که دانش آموزان کشورمان نیز در حل مسائل مربوط به کسرها دچار مشکل می باشند (دوستی و همکاران ۱۳۹۳). بدفهمی، ایده ای شهودی است که دانش آموز در تجربه و تعامل با دنیای بیرونی در ذهن خود ساخته است. باتل چنین بیان می دارد: "بدفهمی ناشی از این است که دانش آموز، مطلب را درک نکرده یا به غلط درک کرده است. در واقع این خطاها ناشی از بی دقتی یا بی توجهی به فعالیت نیستند و ریشه های عمیق تری دارند. بدفهمی دانش آموزان ممکن است از تجربیات و دانسته های پیشین آنها در زندگی روزمره نشأت بگیرد و به طور جدی توسط دانش آموزان حفظ شود و نتایج حاصل از آن ها، یادگیری را به تاخیر اندازد (باتل، گیل، ۲۰۰۵).

اسمال (۲۰۰۹) در یکی از اسناد برنامه درسی ریاضیات ایالت انتاریو کانادا چنین بیان می کند: "وقتی معلم با ایده ها و مفاهیمی که برای دانش آموزان پیچیده هستند و دلایل این پیچیدگی، آشنا باشد، آموزش خود را در سطحی متناسب با سطح رشد دانش آموزان ارائه می کند و از این طریق دانش آموزان را برای ساختن مفاهیم به شکلی صحیح به چالش می کشد. این امر موجب می شود تا احتمال شکل گیری بدفهمی های ریاضی در دانش آموزان کاهش یابد."

اکنون این سوال مطرح می باشد که چگونه می توان حل مسائل مربوط به کسرها را آموزش داد تا فرآیند یادگیری به بهترین نحو انجام شود. در این مقاله اجرای یک تدریس چند مرحله ای متناسب با بدفهمی های رایج دانش آموزان در حل مسائل مربوط به کسرها پیشنهاد داده شده است.

۲) الگوی تدریس چند مرحله ای

۱-۲. ساده کردن کسرها

یک اشتباه متداولی که دانش آموزان هنگام ساده کردن کسرها انجام می دهند، این است که صورت و مخرج را به فاکتور مشترک آنها تقسیم می کنند و چه بسا بعد از این تقسیم عملیات ساده کردن را متوقف می کنند و در صورتی که هیچ فاکتور مشترکی به ذهنشان خطور نکند، کسر را ساده شده معرفی می کنند. برای جلوگیری از این اشتباهات می توان ساده کردن کسرها را به صورت زیر تدریس کرد.

مرحله اول: باید برای دانش آموزان توضیح داده شود که برای ساده کردن یک کسر، باید صورت و مخرج کسر را بر بزرگترین فاکتور مشترک (بزرگترین مقسوم علیه مشترک) تقسیم کنند. در این صورت حتما کسر به شکل ساده شده در می آید. اگر دانش آموزان مفهوم بزرگترین مقسوم علیه مشترک را نمی دانند، لازم است که مفهوم آن و چگونگی یافتن آن به شکل زیر توضیح داده شود.

الف) صورت و مخرج را به عوامل اول تجزیه کنید.

(ب) پایه های مشترک در تجزیه صورت و مخرج را مشخص کنید.

(ج) پایه های مشترک با توان کمتر را انتخاب کنید.

(د) ضرب پایه های مشترک با توان کمتر همان بزرگترین فاکتور مشترک (بزرگترین مقسوم علیه مشترک) می باشد.

مرحله دوم: توضیح دهید که اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین صورت و مخرج کسر برابر یک شود، کسر به شکل ساده شده می باشد. به عنوان

مثال $\frac{11}{5}$ به شکل ساده است زیرا بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین دو عدد 11 و 5 برابر یک می باشد.

مرحله سوم: توضیح دهید که کسرهای منفی هم به همان شکل کسرهای مثبت ساده می شوند. و در اینجا می توانید تذکر دهید که علامت منفی کسر

ممکن است قبل از صورت و یا قبل از مخرج و یا قبل از کسر نوشته شود. به عنوان مثال

$$\frac{-3}{5} \text{ و } \frac{3}{-5} \text{ و } -\frac{3}{5} \text{ یکی هستند.}$$

مرحله چهارم: کسرهای مثبت و منفی را به عنوان تمرین به دانش آموزانتان بدهید و از آنها بخواهید کسرها را ساده کنند. می توانید در ابتدای حل

تمرینات نکات اصلی را به صورت زیر تکرار کنید.

توضیح: برای ساده کردن یک کسر، باید صورت و مخرج کسر را بر بزرگترین فاکتور مشترک (بزرگترین مقسوم علیه مشترک) تقسیم کنید.

هنگامی یک کسر ساده شده است که بزرگترین مقسوم علیه مشترک صورت و مخرج یک باشد.

می توانید در انتهای توضیح مراحل، نکته زیر را هم متذکر شوید.

نکته: اگر صورت و مخرج کسر زوج باشند، حتما کسر به صورت ساده شده نمی باشد. چون حداقل فاکتور مشترک ۲ بین صورت و مخرج وجود

دارد پس اگر چنین کسری را دیدید، حتما ساده شده نیست.

۲-۲. تبدیل اعداد مخلوط به کسر

فازیو و سیگلر (۲۰۱۱) معتقدند که برخی از دانش آموزان به منظور کار با اعداد مخلوط و تبدیل آن به کسر، عدد کامل را در صورت کسر ضرب

می کنند و جواب را روی مخرج می نویسند. به عنوان مثال $2\frac{2}{5} = \frac{4}{5}$.

در بعضی موارد نیز دانش آموزان فکر می کنند که در مورد همه کسرها، باید مخرج را در عدد کامل ضرب کرده و سپس با صورت جمع کرده و

بعد از آن جواب بدست آمده را روی مخرج نوشت. در صورتی که این قانون فقط برای کسرهای مثبت وجود دارد و این می تواند منبع ایجاد خطا برای

تبدیل اعداد مخلوط منفی به کسر باشد.

و غیر از آن چون بیشتر دانش آموزان علت انجام این مراحل را در کسرهای مثبت نمی دانند، نمی توانند این قوانین را به ذهن بسپارند. برای جلوگیری

از این اشتباهات می توان مطلب را به صورت زیر تدریس کرد.

مرحله اول: ابتدا توضیح دهید که چرا این قانون برای نوشتن یک عدد مخلوط به کسر درست است. برای اینکار می توانید از یک مثال استفاده

کنید. یک پیتزا بزرگ را به ۸ تکه برش بزنید. اگر یک دانش آموز $2\frac{1}{8}$ پیتزا برای خودش و دوستانش سفارش بدهد. این به معنی دو پیتزا کامل و

$\frac{1}{8}$ پیتزا است. (در این مثال مفهوم عدد مخلوط هم برای دانش آموز یاد آوری می شود). دو پیتزا کامل هر کدام ۸ تکه دارند که روی هم ۱۶ تکه

می شود که اگر با یک تکه اضافه جمع کنیم ۱۷ تکه می شود بنابراین داریم:

$$2\frac{1}{8} = \frac{17}{8}$$

مرحله دوم: توضیح دهید که قانون بالا برای اعداد مخلوط منفی به کار برده نمی شود. برای نوشتن یک عدد مخلوط منفی به صورت کسر باید

ابتدا علامت منفی کنار گذاشته شود و عدد مخلوط مثبت با قانون بالا به کسر تبدیل شود و سپس علامت منفی در کسر حاصل ضرب شود. می توان

مثالی مشابه مثال زیر ارائه دهید.

$$-2\frac{1}{8} = -(2\frac{1}{8} = \frac{17}{8}) = -\frac{17}{8}$$

مرحله سوم: مثال هایی از اعداد مخلوط را به دانش آموزان بدهید و از آنها بخواهید با توجه به مطالب گفته شده، این اعداد را به کسر تبدیل کنند.

می توانید قبل از حل تمرینات نکته زیر را مطرح کنید.

نکته: بهتر است قبل از تبدیل یک عدد مخلوط به کسر، اطمینان حاصل کنید که عدد مخلوط شکل ساده را دارد.

۳-۲. مقایسه کسرها

بدفهمی های متداول زیادی در مقایسه کردن کسرها وجود دارد. (دوستی، ۱۳۹۲، به نقل از استافیلد و سنیاو) بیان می کند که بعضی از دانش

آموزان در مقایسه کسرها، صورت و مخرج کسر را به عنوان دو عدد مستقل در نظر می گیرند. این دسته از دانش آموزان، ممکن است، تصور کنند که اگر

صورت و یا مخرج کسر افزایش یابد، ارزش کسر زیاد می شود و در نتیجه $1 = \frac{1}{1}$ را کوچکترین کسر فرض می کنند.

برخی دیگر تصویری برعکس داشته و فکر می کنند، اگر صورت و یا مخرج کسر افزایش یابد، ارزش کسر کم می شود. این دسته از دانش آموزان

$1 = \frac{1}{1}$ را بزرگترین کسر در نظر می گیرند و تعدادی از دانش آموزان قواعد مقایسه اعداد طبیعی را به کسر تعمیم می دهند. این دسته از دانش آموزان $\frac{1}{8}$

را بزرگتر از $\frac{1}{6}$ می دانند زیرا ۸ بزرگتر از ۶ است.

داناون و دردسفورد (۲۰۰۵) بیان می کنند که برخی از دانش آموزان دو کسر $\frac{3}{4}$ و $\frac{8}{9}$ را معادل می دانند. آنها ریشه این بدفهمی را در این استدلال

نادرست می دانند که هر دو کسر دارای صورت یک واحد بیشتر از مخرج هستند و در نتیجه مساویند.

غیر از آن مقایسه دو کسر منفی برای تعدادی از دانش آموزان مشکل است. تعدادی از دانش آموزان می توانند به راحتی درک کنند که $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ اما

با درک $-\frac{2}{3} > -\frac{1}{3}$ مشکل دارند. برای کاهش این بدفهمی ها، مراحل تدریس این مطلب به شکل زیر پیشنهاد داده می شود.

مرحله اول: ابتدا علامت کوچکتر و بزرگتر را برای دانش آموزان توضیح دهید. می توانید بگویید که علامت همیشه اشاره می کند به عدد کوچکتر و یا علامت باز شده است به سمت عدد بزرگتر.

مرحله دوم: از دانش آموزان بخواهید که به علامت منفی کسرها توجه کنند. و توضیح دهید که چگونه با منفی کردن کسرها علامت عوض می شود. برای اینکار می توانید از محور اعداد حقیقی کمک بگیرید و مثال هایی مشابه مثال زیر را با کمک این محور توضیح دهید.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$$

مرحله سوم: بهتر است که برای مقایسه کسرها از دانش آموزان خواسته شود که مخرج کسرها را با کمک مخرج مشترک گرفتن شبیه هم کنند و سپس صورتهای آنها را با هم مقایسه کنند. در اینصورت کمتر به خاطر علامت کسر دچار اشتباه می شوند. اگر نیاز بود، مراحل پیدا کردن مخرج مشترک و نوشتن کسرها را با دانش آموزان مرور کنید.

مرحله چهارم: چند کسر از نوع مثبت و منفی به دانش آموزان بدهید و از آنها بخواهید با در نظر گرفتن مراحل بالا آنها را با هم مقایسه کنند.

۲-۴ نمایش کسرها به شکل اعشاری

در تبدیل یک کسر به عدد اعشاری تعدادی از دانش آموزان مفهوم تکرار رقم های اعشار را درک نمی کنند و یا اگر این مطلب را هم درک کنند، نمی توانند دنباله ای از رقم های تکراری را شناسایی کنند و با اضافه شدن کسرهایی منفی به کسرهایی مثبت، مطلب گیج کننده تر می شود. برای بهبود بخشیدن به کیفیت یادگیری این تبدیل، مراحل تدریس به شکل زیر پیشنهاد می شود.

مرحله اول: توضیح دهید که ابتدا کسر باید به شکل ساده نوشته شود و سپس برای تبدیل این کسر ساده شده به یک عدد اعشاری، باید صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم. گاهی لازم است که گام های تقسیم برای تقسیم های طولانی نشان داده شود.

مرحله دوم: با توجه به نتایج مرحله قبل، مفهوم عدد اعشاری مختوم و عدد اعشاری متناوب را توضیح دهید. می توانید این مطلب را اینگونه بیان کنید که اگر در تقسیم صورت به مخرج، باقیمانده صفر شود، عدد اعشاری حاصل در خارج قسمت را یک عدد اعشاری مختوم می گویند و اگر در این تقسیم باقیمانده صفر بدست نیاید و در عدد اعشاری حاصل، رقم و یا ارقامی تکرار شوند. در اینصورت، این عدد اعشاری را متناوب می گویند و در این حالت به جای تکرار رقم و یا ارقام می توان از یک خط روی رقم هایی که تکرار می شوند، استفاده کرد. در اینجا می توانید این مطلب را تذکر دهید که البته اعداد اعشاری بی پایانی هستند که رقم های آنها تکرار نمی شوند که آنها را گنگ می گویند مثل π .

مرحله سوم: از دانش آموزان بخواهید که به علامت منفی کسرها توجه کنند و توضیح دهید که اگر کسری منفی باشد، برای تبدیل آن به عدد اعشاری، ابتدا علامت کسر کنار گذاشته می شود و سپس مراحل بالا انجام شده و در انتها جواب در منفی ضرب می شود.

مرحله چهارم: چند کسرمثبت و منفی که حاصل تبدیل آنها، اعداد اعشاری مختوم و متناوب است را به عنوان تمرین به دانش آموزان بدهید و از آنها بخواهید با در نظر گرفتن مراحل بالا آنها را به عدد اعشاری تبدیل کنند.

۳) بحث و نتیجه گیری

تحقیقات مختلف عملکرد دانش آموزان در حل مسائل مربوط به کسرها، بیانگر این مطلب می باشد که دانش آموزان در حل این گونه مسائل دچار خطا و اشتباهات متداولی می شوند. شناخت این اشتباهات برای کاهش و برطرف کردن آنها با ارزش است. ارائه یک الگوی تدریس متناسب با این اشتباهات، می تواند خطاهای دانش آموزان را کاهش دهد و کیفیت یادگیری را افزایش دهد.

منابع

۱. باتل، گیل (۲۰۰۵)، روش تدریس ریاضی در دوره ابتدایی، مترجم: شهرناز بخشعلی زاده، چاپ اول. تهران، انتشارات سمت.
۲. دوستی، ملیحه (۱۳۹۲)، بررسی درک و فهم دانش آموزان پایه ششم از کسرها، پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران.
۳. دوستی، ملیحه، ریحانی، ابراهیم، بخشعلی زاده، شهرناز (۱۳۹۳)، مدل ها و چارچوب های اساسی درک کسرها در آموزش ریاضی. سومین همایش مجازی ره آوران آموزش، خرداد ماه ۹۳.

۴. Donovan, Suzanne M. Dradsford, John D. How Students Learn: Mathematics in the Classroom, National Research Council Of National Academies Of Science, (۲۰۰۵).
۵. Fazio, L. & Siegler, R. Teaching Fraction, Educational Practice Serries- ۲۲. (۲۰۱۱)
۶. Hiebert, J. & Behr, M. Introduction: Capturing the Major Themes. In Hiebert, J. & Behr, M. (Eds) Number Concepts and Operations in the Middle Grades (PP. ۱-۱۸). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates (۱۹۹۸).
۷. small, M. Making math meaningful to Canadian, students, Toronto, ON: Nelson Education, (۲۰۰۹).