نقش ترسیم در استدلال های هندسی

سهراب عظیم پور[۱]

چکیده

از زمان‌های دور، فهم و درک مفاهیم ریاضی و هندسه برای اکثر دانش آموزان و دانشجویان، مسئله‌ی حادی بوده است. به خصوص درک مفاهیم درس هندسه که با تجسم فضایی نیز به همراه باشد باعث می شود مشکلات درک و یادگیری را دوچندان می‌کند. هندسه و به ویژه چند ضلعی ها یکی از ابزارهای مهمی هستند که به کمک آن ها می توان این ابهامات را، از بین برد. در فرآیند یاددهی- یادگیری در مبحث ترسیم‌های هندسی و استدلال، عوامل و عناصر بسیاری دخیل هستند، معلم ناچار است این مجموعه عوامل را در جهت اثربخشی مثبت کلاس خود سازمان‌دهی کند، بنابراین از همه‌ی ابزار و دانش حرفه‌ای که در اختیار دارد، حداکثر استفاده را می‌برد. برای بهره‌گیری از آن‌ها، معلمان باید دارای مهارت‌های مختلف تفکر باشند. عمل فکورانه‌ی معلمان، نقش کلیدی در افزایش کیفیت تدریس و یادگیری در کلاس دارد مطالعه ی قضیه تالس و تشابه در شکل های هندسی، اهمیت فوق العاده ای دارد. در این مقاله، مفاهیم اولیه هندسه مورد توجه قرار می گیرد سپس با استفاده از ابزار ترسیم، مسئله هایی که برای دانش آموزان یا فراگیران مبهم است جواب داده می شود.

کلمات کلیدی: قابل انطباق، تشابه، مربع و متنافر.

[۱]. استادیار دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران. نویسنده مسئول، azimpour@cfu.ac.ir

دریافت: ۹۸/۱/۲۵ پذیرش: ۹۸/۲/۳

مقدمه

هندسه و به ویژه ترسیم های هندسی از دیرباز مورد استفاده ی بشر بوده و خواهد بود. همه ی هنرمندان و معماران با هر سبک و در هر رشته به دنبال آن هستند که دیدگاه های خود را از زندگی و جهان اطراف خود در آن چه خلق می کنند و می سازند به نوعی به نمایش بگذارند. هندسه و به ویژه چند ضلعی ها یکی از ابزارهای مهمی هستند که به کمک آن ها می توان این آثار را پدید آورد. در فرآیند یاددهی- یادگیری در مبحث ترسیم‌های هندسی و استدلال، عوامل و عناصر بسیاری دخیل هستند، معلم ناچار است این مجموعه عوامل را در جهت اثربخشی مثبت کلاس خود سازمان‌دهی کند، بنابراین از همه‌ی ابزار و دانش حرفه‌ای که در اختیار دارد، حداکثر استفاده را می‌برد. برای بهره‌گیری از آن‌ها، معلمان باید دارای مهارت‌های مختلف تفکر باشند. عمل فکورانه‌ی معلمان، نقش کلیدی در افزایش کیفیت تدریس و یادگیری در کلاس دارد قضیه تالس و تشابه در شکل های هندسی، کاربردهای زیادی در محاسبه طول ها و فاصله های غیر قابل دسترس دارند. محاسبه ی ارتفاع بلندی ها به کمک سایه ی آن ها نمونه ای از این کاربردهاست.

عمل تدریس، نیازمند دانش و معلومات حرفه‌ای چندگانه‌ای است که شامل دانش موضوعی، دانش‌آموزشی، دانش برنامه درسی و معلومات تفاوت‌های فرهنگی و دانش ارتباطی می‌باشد. بسیاری از محققان روی این اصل توافق دارند که تدریس به دانش‌های مختلف نیازمند است و این دانش‌ها به‌طورکلی روشن هستند اما توافق کمتری بر روی این موضوع وجود دارد که این دانش، به چه شیوه‌ای آموخته شود آن‌ها معتقدند که کلاس‌های درس پیچیده و غیرقابل‌پیش‌بینی هستند و لذا دانش مربوط به تدریس باید در حین عمل و فعالیت کسب شود. درواقع معلمان مجبورند یاد بگیرند قبل از این‌که تدریس کنند و همچنین زمانی که تدریس می‌کنند باید از عمل تدریس خودشان یاد بگیرند. بر اساس این باور، کسب دانش و تدریس ریاضی و هندسه، دو روی، یک سکه هستند که هر دو باید همزمان انجام گیرند. برای رسیدن به چنین مقصودی، یعنی بهبود کیفیت تدریس ریاضی و به خصوص هندسه، مناسب‌ترین روش در حال حاضر استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی است که می‌تواند دانش دانشجو معلمان آموزش ریاضی را برای تدریس افزایش دهد. روشن است که از طریق یافته‌های این پژوهش می‌توان در توسعه حرفه‌ای معلمان، به خصوص دانشجو معلمان ریاضی و اصلاح بهبود روش‌های تربیت معلم، بهره‌مند شد.

در این مقاله به آنالیز محتوای کتاب هندسه ی ۱ سال دهم رشته ریاضی می پردازیم به منظور رفع ابهامات برای دانش آموزان و تعدادی مسئله ی مکمل برای موضوعات این کتاب را بیان و اثبات می کنیم. بنابراین لازم است قبل از بیان مسائل، تعاریف مقدماتی مورد نیاز را بیان کنیم.

تعریف ۱: دو شکل هم نهشت (قابل انطباق)

دو شکل را در صورتی هم نهشت یا قابل انطباق گوییم که تمامی زوایا وا ضلاع نظیر هم برابر باشند.

حالت خاص: دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ در سه حالت زیر می توانند هم نهشت (قابل انطباق) باشند.

۱) دو ضلع از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با دو ضلع از مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ هم اندازه و زاویه ی بین این اضلاع در دو مثلث برابر باشند.

۲) دو زاویه از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با دو زاویه از مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ برابر بوده و اضلاع بین این زوایا در دو مثلث هم اندازه باشند.

۳) سه ضلع از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با سه ضلع از مثلث $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ نظیر به نظیر هم اندازه باشند.

تعریف ۲: دو شکل متشابه

دو شکل را متشابه گوییم هر گاه با استفاده از عملیاتی چون تغییر مقیاس (تجانس)، دوران، انتقال یا بازتاب محوری بتوان یکی را به دیگری تبدیل نمود.

ممکن است تشخیص تشابه دو شکل هندسی دشوار باشد زیرا ممکن است نیاز به اعمال دوران، انتقال یا بازتاب محوری نیز باشد.

نتیجه: در هندسه دو شکل هم نهشت خواهند بود اگر نسبت تشابه آن ها برابر یک باشد

تعریف ۳: نیمساز

نیمساز زاویه ی $A\hat{O}B$ عبارت است از نیم خط $\overrightarrow{OX}$ بطوری که هر نقطه روی $\overrightarrow{OX}$ از دو ضلع زاویه ی $A\hat{O}B$ به یک فاصله باشد.

تعریف ۴: مربع

مربع یک چهارضلعی که همه ی اضلاع آن هم اندازه بوده و حداقل یک زاویه ی قائمه داشته باشد.

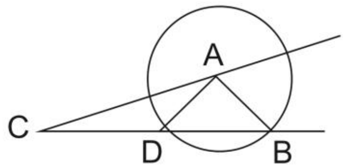
تعریف ۵: دو خط متنافر

دو خط که نقطه ی مشترکی نداشته باشند و در یک صفحه قرار نگیرند.

یافته ها و بحث

مسئله اول: اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر، قابل انطباق بوده و یکی از زوایای خارج این دو ضلع در هر دو مثلث، قابل انطباق باشند آیا این دو مثلث قابل انطباق اند؟

جواب: منفی است. دایره ای به مرکز A و به شعاع AD رسم می کنیم مطابق شکل ۱ چون AB و AD هر دو شعاع دایره اند لذا AD=AB . حال دو مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$ و $\overset{\Delta}{ACB}$ را در نظر بگیرید.



شکل ۱

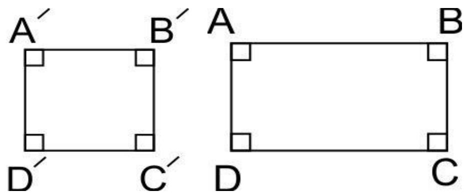
در این دو مثلث
$$AC = AC$$
$$AD = AB$$
$$\hat{C} = \hat{C}$$

بدیهی است دو مثلث $\overset{\Delta}{ACD}$ و $\overset{\Delta}{ACB}$ قابل انطباق نیستند.

مسئله دوم: اگر در تعریف تشابه دو شکل، فقط به تساوی زاویه ها، اشاره شود آیا دو شکل، باز می توانند تشابه باشند؟

جواب: منفی است:

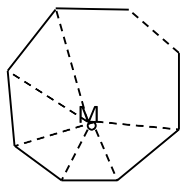
چهارضلعی های، $ABCD$ و $A'B'C'D'$ مستطیل و مربع اند (شکل۲) که همه ی زوایای آن قائمه اند ولی این دو شکل متشابه نیستند.



شکل۲

مسئله سوم: با استدلال استنتاجی، نشان دهید مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب، برابر $۱۸۰\times(n-۲)$ است.

حل: یک n ضلعی محدب دلخواه مطابق شکل ۳ در نظر می گیریم نقطه ای مانند M را در داخل این n ضلعی محدب در نظر می گیریم تعداد پاره خط هایی که یک سر آن ها نقطه ی M و سر دیگر آن، رئوس روی n ضلعی محدب باشند، برابر n تا است.



شکل ۳

بنابراین این n ضلعی (رئوس این n ضلعی) به همراه رأس M، n مثلث تشکیل می دهند لذا مجموع زوایای داخلی این n مثلث $۱۸۰\times n$ است. از طرفی های این مثلث ها در رأس M مشترک و مجموع های زوایای مربوط به این مثلث ها به رأس M، $۳٦۰ = ۲\times۱۸۰$ می باشند لذا

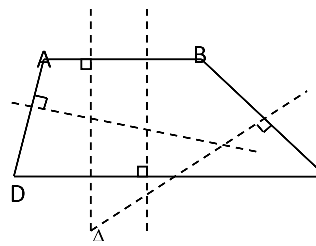
$۱۸۰\times(n-۲) =$ مجموع زوایای داخلی n ضلعی محدب

مسئله ی چهارم:

آیا برای یک n ضلعی محدب $n \geq ٤$، همواره، دایره ی محیطی وجود دارد؟

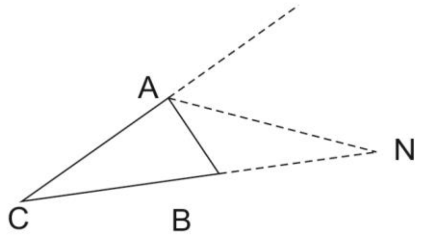
جواب: منفی است.

اگر جواب داشته باشد، باید مرکز این دایره محل تقاطع عمود منصف های اضلاع n ضلعی باشند که با توجه شکل ۴، چنین چیزی امکان ندارد.



شکل ۴

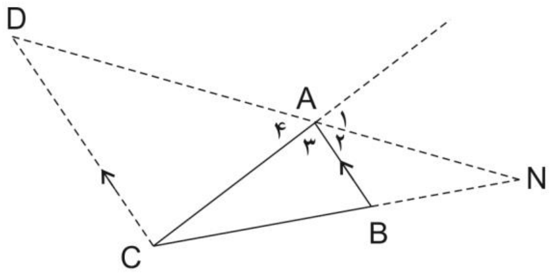
مسئله ی پنجم: با استدلال استنتاجی ثابت کنید نیمساز زاویه ی خارجی یک رأس A (مطابق شکل ۵) از مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، ضلع مقابل به این زاویه (امتداد ضلع مقابل) را به نسبت اضلاع دو ضلع زاویه ی A قطع می کند $\frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NC}$



شکل ۵

برهان:

از نقطه ی C خطی به موازات AB رسم می کنیم تا این که، امتداد AN را در نقطه ای مانند D قطع کند. (مطابق شکل ۶)



شکل ۶

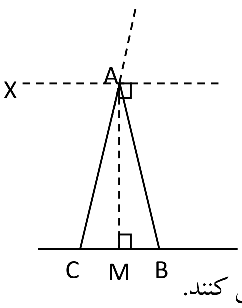
AN نیمساز خارجی زاویه ی A است پس $\hat{A}_1=\hat{A}_2$. چون $AB \| DC$ لذا $\hat{D}=\hat{A}_1$ و در نتیجه $\hat{A}_4=\hat{D}$ پس

$$CD=CA \qquad (I)$$

بنابراین در مثلث $D\overset{\Delta}{C}N$ چون $AB \| DC$ بنا به قضیه ی تالس

$$\frac{NB}{NC}=\frac{AB}{CD}\overset{(I)}{\Rightarrow}\frac{NB}{NC}=\frac{AB}{AC}$$

حالت خاص: در صورتی که نیمسازهای داخلی و خارجی در یک مثلث بر هم عمود باشند (یعنی مثلث خود متساوی الساقین باشد) امتداد نیمساز خارجی ضلع مقابل را در بینهایت قطع می کند. (مطابق شکل۷)



شکل ۷

حل: فرض کنید $\overleftrightarrow{XA}$ نیمساز خارجی راس A با خط $\overleftrightarrow{CB}$ موازی باشد لذا همدیگر را در بینهایت قطع می کنند.

با تصور آن که دو خط موازی همدیگر را در بینهایت در نقطه ای مانند N قطع کنند.

تساوی $\frac{CN}{BN}=\frac{AC}{AB}$ قابل قبول است زیرا مشابه حالتی که $\lim_{x\to\infty}\frac{x+۷}{x+۱}=۱$ می توانیم $\frac{CN}{BN}\cong ۱$

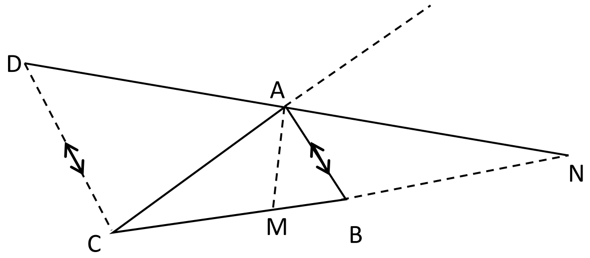
مثال: در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، طول اضلاع $AB=۲, AC=۸, BC=۹$ است، نیمسازهای زاویه ی A، ضلع BC را در M و N قطع می کند اندازه ی MN کدام است؟

۱) ۴/۲ ۲) ۴/۵ ۳) ۴/۸ ۴) ۵/۱

حل: از C، خطی به موازات AB رسم می کنیم، لذا طبق مساله ی ششم

$$\frac{AB}{AC}=\frac{NB}{NC}$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{NB}{NB+BC}\to\frac{۲}{۸}=\frac{NB}{NB+۹}\Rightarrow\frac{۱}{۴}=\frac{NB}{NB+۹}\Rightarrow NB+۹=۴NB\to NB=۳$$



شکل ۸

از طرفی

$$\frac{AB}{AC}=\frac{MB}{MC}\to\frac{AB}{AC+AB}\to\frac{MB}{MB+MC}$$

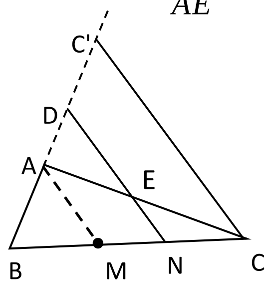
$$\xrightarrow{MB+MC=BC}\frac{۲}{۸+۲}=\frac{MB}{۹}\to MB=۱/۸$$

بنابراین

$$MN=MB+BN=۱/۸+۳=۴/۸$$

مساله ششم:

در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، $\frac{AB}{AC}=\frac{n}{m}$ که در آن $n,m\in N$ و پاره خط DN موازی میانه AM است نسبت $\frac{AD}{AE}$ چقدر است (مطابق شکل ۹)



شکل ۹

حل: از C خطی به موازت AM رسم می کنیم تا امتداد AB را در C قطع طبق فرض $BM = MC$ لذا در مثلث $\overset{\Delta}{BCC'}$، $AM \parallel CC'$ پس

$$AB = AC' \qquad (I)$$

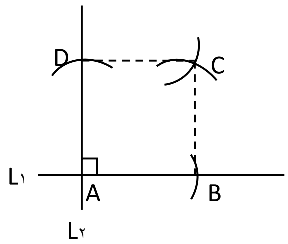
از طرفی دو مثلث $\overset{\Delta}{ADE}, \overset{\Delta}{ACC'}$ متشابه اند زیرا $DE \parallel CC'$ بنابراین

$$\frac{AD}{AC'} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AC'}{AC} \overset{(I)}{\Rightarrow} \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{n}{m}$$

مسئله ی هفتم:

با استفاده از پرگار و خط کش یک مربع رسم کنید.

ابتدا دو خط عمود بر هم $L_۲, L_۱$ را مطابق شکل ۱۰ رسم می کنیم فرض کنید $L_۱ \cap L_۲ = \{A\}$. حال به مرکز A و به شعاع ثابتی مانند r، کمانی رسم می کنیم تا دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را در نقاط D,B قطع کند پس به مراکز D,B و با همان شعاع r ، کمان هایی را رسم می کنیم. محل برخورد این دو کمان یعنی C، جواب مسئله است. زیرا حداقل یک زاویه ی قائمه دارد و همه ی اضلاع $ABCD$ ، هم اندازه اند.



شکل ۱۰

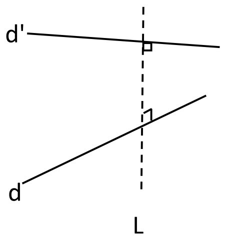
مسئله هشتم

آیا عکس قضیه ی زیر در فضا برقرار است؟

اگر دو خط d',d موازی هم باشند آنگاه حداقل یک خط عمود بر d وجود دارد بطوری که بر خط d' عمود باشد.

جواب:

دو خط متنافر d',d را در فضا مطابق شکل ۱۱ در نظر بگیرید. فرض کنید L خطی باشد که بر هر دو خط d',d در فضا عمود باشد پبنابراین:



شکل ۱۱

$$\begin{array}{l} L \perp d \\ L \perp d' \end{array} \Rightarrow d \parallel d'$$

چون d',d متنافرند بنابراین عکس این قضیه نمی تواند همواره برقرار باشد.

نتیجه گیری

استفاده از ترسیمات هندسی به همراه تفکر تجسمی می تواند راهگشای مسائل هندسی باشد.

منابع

۱- هندسه ۱، پایه دهم دوره ی دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران
۲- هندسه ۲، پایه ی یازدهم دوره ی دوم متوسطه، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.